Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

4 mars 2023

Exercice 1

On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, ainsi que la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, et la condition initiale $u_0 = 0$.

1. Étudier les variations de la fonction f, et dresser son tableau de variation complet.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$. On montrera en particulier que f admet un unique point fixe qu'on notera désormais l, et on prouvera que $l \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
3. Tracer dans un même repère une allure de la courbe représentative de la fonction f, ainsi que la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (u_n).
4. Montrer que l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ est stable par f, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. Montrer que, pour tout réel positif, on a $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Montrer que, pour tout entier n, $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - l|$, puis $|u_n - l| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. En déduire la convergence de la suite (u_n), ainsi qu'une valeur de n pour laquelle on peut affirmer que $|u_n - l| \leqslant 10^{-5}$.
8. Existe-t-il des valeurs de u_0 pour lesquelles une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas ? On justifiera bien sûr la réponse donnée.

Exercice 2

On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Étude des fonctions f_n.
   (a) Préciser le domaine de définition des fonctions f_n.
   (b) Calculer les dérivées f_n' et f_n''.
   (c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f_n', en déduire les variations de la fonction f_n puis dresser également le tableau de variations de f_n.
   (d) Donner les coordonnées des points d'inflexions éventuels de la courbe $\mathcal{C}_n$, ainsi que l'équation des tangentes en ces points.
   (e) Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_1$ en tenant compte des calculs précédents.
2. Étude d'une suite implicite.
   (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique, qu'on notera désormais u_n.
   (b) Montrer que $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n). Ce calcul est-il nécessaire pour prouver la convergence de la suite ?
   (d) Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n + \dfrac{n}{2} = -\dfrac{1}{8}$, en déduire qu'on peut écrire $u_n = -\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + \dfrac{\varepsilon(n)}{n^2}$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Exercice 3

On pose dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On notera également $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$. En déduire que la matrice A est inversible, et donner explicitement son inverse A^{-1}.
2. À l'aide d'un pivot de Gauss partiel (on s'arrêtera dès qu'on pourra conclure), déterminer tous les réels x pour lesquels la matrice $A - xI_3$ n'est **pas** inversible (il ne devrait pas y en avoir beaucoup).
3. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, résoudre l'équation matricielle $AX = 2X$. Donner en particulier l'unique solution vérifiant $y = 1$ et $z = 0$, ainsi que l'unique solution vérifiant $y = 0$ et $z = 1$.
4. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer son inverse.
5. Calculer $P^{-1}AP$. On notera pour la suite T la matrice obtenue (qui doit être triangulaire supérieure).
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
7. En écrivant T sous la forme $2I_3 + N$, calculer les puissances de la matrice T, et en déduire A^n (explicitement).
8. La formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on définit une fonction L_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$, où les fonctions f_n sont elle-mêmes définies par $f_n(x) = e^{-x}x^n$.

1. Faire l'étude des fonctions f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (variations, limites, convexité, points d'inflexion).
2. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes représentatives de f_0, de f_1 et de f_2.
3. Calculer L_0, L_1 et L_2.
4. Vérifier que, pour $n \leqslant 2$, $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$.
5. Démontrer la formule précédente pour tout entier n.
6. À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)$.
7. En déduire la relation $(n+1)L_{n+1}(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.
8. Montrer que, si $k \in \{1, 2 \dots, n\}$, alors $\frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k} + \frac{n+1}{k!}\binom{n}{k} + \frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k!}\binom{n+1}{k}$.
9. Redémontrer par récurrence le résultat de la question 5.
10. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = L_n(x)$.