Devoir Surveillé n$^{\mathrm{o}}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 janvier 2023

Exercice 1

1. Puisque l'équation ne fait intervenir que les carrés des trois inconnues, si (x, y, z) est solution, alors $(|x|, |y|, |z|)$ sera un triplet de solutions dans $\mathbb{N}^3$. Réciproquement d'ailleurs, si (x, y, z) est une solution dans $\mathbb{N}^3$, alors tous les triplets de la forme $(\pm x, \pm y, \pm z)$ seront solutions du problème.

2. (a) Notons simplement d le pgcd des entiers x_0, y_0 et z_0. Par définition du pgcd, les nombres $x_1 = \dfrac{x_0}{d}$, $y_1 = \dfrac{y_0}{d}$ et $z_1 = \dfrac{z_0}{d}$ sont entiers, et ont un pgcd égal à 1. Or, le triplet (x_1, y_1, z_1) est clairement solution de l'équation de départ.

   (b) Faisons donc un petit tableau, toutes les valeurs étant donc des restes modulo 7 :

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1
$-n^2$	0	6	3	5	5	3	6

   (c) Puisqu'on a bien entendu $7z_1^2 \equiv 0[7]$, l'équation initiale implique que $x_1^2 + y_1^2 \equiv 0[7]$, ou encore que $x_1^2 \equiv -y_1^2[7]$. D'après le tableau précédent, les seuls carrés pouvant être opposés modulo 7 sont ceux de nombres divisibles par 7 (on ne trouve aucun couple de valeurs identiques dans les deux dernières lignes du tableau ailleurs que dans la première colonne). Les nombres x_1^2 et y_1^2 doivent donc être tous les deux divisibles par 7 pour que le triplet (x_1, y_1, z_1) puisse être solution. Or, si 7 divise $x_1^2 = x_1 \times x_1$, alors 7 divise x_1 puisque 7 est un nombre premier. De même pour y_1.

   (d) Si x_1 et y_1 sont tous les deux divisibles par 7, alors $x_1^2 + y_1^2$ est divisible par 7^2, donc $7z_1^2$ est un multiple de 49, ce qui implique que z_1^2 est un multiple de 7, et donc que z_1 également (même raisonnement qu'à la question précédente). Les trois nombres z_1, y_1 et x_1 sont donc des multiples de 7, ce qui contredit le fait que leur pgcd soit égal à 1. L'hypothèse qu'il existe une solution non triviale est donc absurde. NOtre équation a donc pour unique solution $(0, 0, 0)$.

3. Le triplet $(1, 2, 1)$ est solution de l'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$ puisque $1^2 + 2^2 = 5 = 5 \times 1^2$. Or, multiplier une solution par un entier naturel quelconque produira toujours une nouvelle solution (si $x^2 + y^2 = 5z^2$, alors $(nx)^2 + (ny)^2 + 5(nz)^2)$, ce qui produit directement une infinité de solutions distinctes de la forme $(n, 2n, n)$. Ce ne sont d'ailleurs pas du tout les seules : on peut changer les signes, permuter les valeurs de x et de y, et même trouver encore d'autres solutions comme $(2, 11, 5)$ (puisque $4 + 121 = 5 \times 25$) qui ne peut pas être obtenue à l'aide des manipulations précédentes. Il existe bien sûr des solutions pour lesquelles $x = 42$ (par exemple $(42, 84, 42)$ ou $(42, 21, 21)$), et aussi pour lesquelles $z = 42$ (encore une fois, $(42, 84, 42)$ convient !).

   L'équation $x^2 + y^2 = 13z^2$ admet comme solution non triviale $(2, 3, 1)$, à partir de laquelle on construit aisément une infinité de solutions non triviales de la forme $(2n, 3n, n)$. Il suffit bien sûr de prendre $n = 42$ pour avoir comme solution $(84, 126, 42)$, pour laquelle $z = 42$. Mais en posant $n = 21$, on trouve aussi $(42, 63, 21)$ qui est une solution pour laquelle $x = 42$. En fait ce n'était pas vraiment plus dur avec 13 qu'avec 5.

Exercice 2

1. L'ensemble E_0 est constitué des matrices vérifiant l'équation $0 = M$, donc $E_0 = \{0\}$. Par contre, l'ensemble F_0 est obtenu en résolvant l'équation $0 = 0$, qui a nettement plus de solutions, donc $F_0 = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On sait que la matrice I est élément neutre pour le produit, donc les équations $IM = M$ et $I^2M = IM$ sont toujours vérifiées, ce qui prouve que $E_I = F_I = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Il suffit de montrer que $AM = M \Rightarrow A^2M = AM$, ce qui est trivial en multipliant les deux membres de l'égalité à gauche par A. Pour que la réciproque soit vraie, il faut pouvoir multiplier à gauche par A^{-1}, ce qui sera bien sûr possible si A est inversible.
3. (a) On calcule bien gentiment $P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^3 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. En effet, on a bien $P^3 = 3P^2 - P - I$ (par exemple pour les coefficients diagonaux, $3 \times 3 - 1 - 1 = 7$, $3 \times 2 - 1 - 1 = 4$ et à nouveau $3 \times 2 - 1 - 1 = 4$). On peut donc écrire $I = 3P^2 - P - P^3 = P(3P - P^2 - I)$, ce qui prouve que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = 3P - P^2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Encore du calcul passionnant : $CP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est comme prévu une matrice diagonale.

   (c) Par exemple, $N \in E_D \Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow P^{-1}CPP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}CM = P^{-1}M \Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow M \in E_C$ (on a simplement remplacé les matrices par leur expression et simplifié par P^{-1} en fin de calcul, ce qui revient à tout multiplier à gauche par P).

   (d) Soyons bourrins : en posant $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule $DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Cette matrice coïncide avec la matrice M si et seulement si $a = b = c = g = h = i = 0$, autrement dit si $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $(d, e, f) \in \mathbb{R}^3$. D'après la question précédente, il suffit maintenant de multiplier ces matrices à gauche par P pour obtenir celles de E_C (puisque $N = P^{-1}M \Leftrightarrow M = PN$). Un calcul à nouveau extrêmement difficile donne $M = \begin{pmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (e) On calcule à nouveau très rapidement $D^2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$. Les matrices appartenant à F_D vérifient donc à nouveau $g = h = i = 0$, par contre on n'a plus aucune condition sur les coefficients de la première ligne ! On en déduit que $F_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$..
   Le même calcul que précédemment permet de déduire que les matrices appartenant à F_C sont obtenues en multipliant les précédentes par P, ce qui donne $M = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
   Quitte à renommer les variables, ce sont toutes les matrices ayant leurs deux premières lignes égales. En particulier, on n'a pas du tout $F_C = E_C$, ce qui prouve donc que C ne peut pas être une matrice inversible.

4. (a) Quoi, encore du calcul ? On va finir par boycotter ce DS... Allons-y quand même : $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, puis $C^3 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$. Pour trouver les coefficients a et b, on écrit par exemple un petit système en ne conservant que les deux premiers coefficients de la matrice (sur la première ligne) : $9 = 5a + 3b$ et $-8 = -4a - 2b$. Pour une fois, on va procéder par substition : la deuxième équation donne $b = 4 - 2a$, en remplaçant dans la première on obtient $9 = 5a + 12 - 6a$, soit $a = 3$, donc on déduit $b = -2$. Finalement, on vérifie sur les autres coefficients qu'on a bien $C^3 = 3C^2 - 2C$.

   (b) Supposons par l'absurde que C est une matrice inversible, on peut alors factoriser la relation précédente par C pour obtenir $C(C^2 - 3C + 2I) = 0$. Si C est inversible, en multipliant par C^{-1} à gauche, on en déduira que $C^2-3C+2I = 0$, donc que $C^2-3C = -2I$. Or ce n'est pas le cas : si on regarde le coefficient première ligne première colonne de $C^2 - 3C$, il est égal à $5 - 9 = -4$, et non à -2. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui prouve que C n'est pas inversible.

   (c) Récurrence classique : c'est vrai au rang $n = 1$ en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, et au rang 2 en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (contrairement à d'habitude, ce n'est par contre pas vrai pour $n = 0$, la matrice I n'étant pas combinaison linéaire de C et C^2). Si on suppose la relation vérifiée au rang n, alors $C^{n+1} = C \times C^n = C(a_nC^2 + b_nC) = a_nC^3 + b_nC^2$. On s'empresse d'appliquer la relation obtenue en question a pour en déduire que $C^{n+1} = a_n(3C^2 - 2C) + b_nC^2 = (3a_n + b_n)C^2 - 2a_nC$, ce qui prouve la relation au rang $n + 1$ en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.

   (d) En décalant la première des relations précédentes, $a_{n+2} = 3a_{n+1}+b_{n+1} = 3a_{n+1}-2a_n$. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-3x+2 = 0$. Les racines sont ici évidentes : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ (les plus observateurs d'entre vous remarqueront qu'il s'agit exactement des coefficients intervenant sur la diagonale de la matrice D calculée en début d'exercice, c'est tout sauf un hasard). Il existe donc deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \alpha + \beta 2^n$. Avec les conditions initiales données dans la question précédente, $a_1 = 0 = \alpha + 2\beta$, et $a_2 = 1 = \alpha + 4\beta$. On soustrait les deux équations pour obtenir immédiatement $\beta = \frac{1}{2}$, puis $\alpha = -1$. Finalement, $a_n = 2^{n-1} - 1$, puis $b_n = -2a_{n-1} = 2 - 2^{n-1}$ (formule également valable pour $n = 1$). Il ne reste plus qu'à conclure : $\forall n \geqslant 1$, $C^n = (2^{n-1} - 1)C^2 + (2 - 2^{n-1})C$.

Problème

A. Étude de relations de récurrence faisant intervenir une racine carrée.

1. (a) Il suffit pour cela de vérifier que tous les termes de la suite sont positifs, ce qui se prouve par une récurrence complètement triviale : c'est le cas de $u_0 = a$ par hypothèse, et $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0$ de façon immédiate.

   (b) La démonstration de la question précédent fonctionne à l'identique pour montrer que que $u_n > 0$ (et pas seulement positif ou nul), ce qui justifie le changement de variable $v_n = \ln(u_n)$. On peut alors calculer $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2\sqrt{u_n}) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(u_n) = \ln(2) + \frac{1}{2}v_n$.

   (c) La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. On écrit son équation de point fixe $x = \ln(2) + \frac{1}{2}x$, qui a pour unique solution $x = 2\ln(2)$. On pose alors une suite auxiliaire (w_n) définie par $w_n = v_n - 2\ln(2)$, et on constate que $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\ln(2) = \ln(2) +$

$\frac{1}{2}v_n - 2\ln(2) = \frac{1}{2}(v_n - 2\ln(2)) = \frac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\ln(2) = \ln(a) - 2\ln(2) = \ln\left(\frac{a}{4}\right)$. On en déduit une expression explicite de w_n, puis de v_n, et enfin de u_n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{a}{4}\right)$, puis $v_n = 2\ln(2) + \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{a}{4}\right)$, et enfin $u_n = e^{v_n} = 4e^{\frac{1}{2^n}\ln(\frac{a}{4})} = 4 \times \left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2^n}}$.

(d) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on aura $\lim u_n = 4$ (aucune forme indéterminée à lever ici), la suite est donc bien convergente. Si on modifie la relation de récurrence par $u_{n+1} = 42\sqrt{u_n}$, on obtiendra après avoir effectué les mêmes changements de variable $v_{n+1} = \ln(42) + \frac{1}{2}v_n$, donc le point fixe sera $x = 2\ln(42)$, puis la suite (w_n) restera géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc de limite nulle. La suite v_n aura donc pour limite $2\ln(42)$ et (u_n) convergera vers $e^{2\ln(42)} = 42^2$. La limite est donc modifiée.

2. (a) Si $b = 1$, on calcule donc $u_0 = 1$, puis $u_1 = \frac{1}{1} \times \sqrt{u_0} = 1$, $u_2 = \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et enfin $u_4 = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{5}}$, ce qui ne se simplifie pas vraiment. Pour les curieux, $u_3 \simeq 0.49$ et $u_4 \simeq 0.4$. La suite semble décroitre gentiment.

(b) On effectue bien sûr une récurrence. La propriété est vérifiée par hypothèse pour $n = 0$, supposons-la vraie au rang n. On peut en déduire, par croissance de la racine carrée, que $\frac{1}{4} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 4$. Or, $\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+2} \leqslant \frac{n+1}{2n+1} \leqslant 1$, donc en multipliant nos deux encadrements on a $\frac{1}{8} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, ce qui est largement suffisant pour prouver u_{n+1} (on a en fait énormément de marge).

(c) On a déjà signalé à la question précédente que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n+1}{2n+1}$. De plus, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Posons $\varepsilon = k - \frac{1}{2}$, qui est un réel strictement positif par hypothèse. La définition de la limite nous permet d'affirmer qu'à partir d'un certain rang, l'encadrement $\frac{1}{2} - \varepsilon \leqslant \frac{n+1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon = k$. La majoration nous donne immédiatement celle demandée par l'énoncé.

(d) On a bien envie de faire une nouvelle récurrence, en démarrant bien sûr au rang N. Si $n = N$, le membre de gauche vaut simplement $\frac{1}{4} \times 4u_N = u_N$ (qui est certainement inférieur ou égal à u_N), et celui de droite vaut également u_N, l'encadrement est donc bien vérifié. Supposons-le correct pour un certain entier $n \geqslant N$. On peut alors appliquer le résultat de la question précédente et l'hypothèse de récurrence pour affirmer que $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{u_n} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(4u_N)^{\frac{2^N}{2^n}}} = \frac{1}{4}(4u_N)^{\frac{2^N}{2^{n+1}}}$ (puisqu'une racine carrée n'est autre qu'une puissance $\frac{1}{2}$, et qu'une puissance de puissance revient à faire un produit des puissances). C'est exactement ce qu'on voulait. On fait pareil pour la majoration : $u_{n+1} \leqslant k\sqrt{u_n} \leqslant k\sqrt{k^2\left(\frac{u_N}{k^2}\right)^{\frac{2^N}{2^n}}} = k^2\left(\frac{u_N}{k^2}\right)^{\frac{2^N}{2^{n+1}}}$. Là encore, on obtient directement le majorant souhaité, ce qui achève la récurrence.

(e) Comme tout à l'heure, il n'y a aucune forme indéterminée pour les calculs de limite des membres de gauche et de droite de l'encadrement : le quotient $\frac{2^N}{2^n}$ tend vers 0, ce qui suffit à assurer que le minorant a pour limite $\frac{1}{4}$ et le majorant pour limite k^2. On ne peut bien sûr pas appliquer le théorème des gendarmes directement. Par contre, si on fixe un $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{k \to \frac{1}{2}} k^2 = \frac{1}{4}$, on peut choisir une valeur de k pour laquelle $k^2 \leqslant \frac{1}{4} + \varepsilon$. Puisque notre membre de droite a pour limite k^2, il existe alors un rang n_0 à partir duquel il sera majoré (et u_n par la même occasion) par $\frac{1}{4} + \varepsilon + \varepsilon$ (définition de la limite). Pour le minorant, pas besoin de s'embêter autant, on a directement un rang n_1 à partir duquel il sera minoré par $\frac{1}{4} - \varepsilon$ (toujours la définition de la limite). On peut donc affirmer que, $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $\frac{1}{4} - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4} + 2\varepsilon$, ce qui suffit à assurer que $\lim u_n = \frac{1}{4}$ (si on n'aime pas le 2ε à droite, on prend des demis ε au départ pour coller parfaitement à la définition de la limite).

B. Limites inférieures et supérieures de suites bornées.

1. Par définition, $v_n = \sup \left\{ \frac{1}{k+1} \mid k \geqslant n \right\} = \frac{1}{n+1}$ (les termes de la suite étant décroissants, la borne supérieure est ici un maximum correspondant au premier d'entre eux), et $w_n = 0$ (tous les termes sont positifs, et quelle que soit la valeur de n, on a toujours des termes dans la suite dont l'indice est supérieur ou égal à n et qui sont arbitrairement proches de 0). Pour une suite décroissante bornée, on aura toujours $v_n = u_n$, et $w_n = l$, où l désigne la limite de la suite (u_n) (qui est forcément convergente en tant que suite décroissante et minorée).
2. Il y aura toujours des termes (et même une infinité) égaux à 1 et -1 parmi ceux dont l'indice est supérieur ou égal à n, donc $v_n = 1$ et $w_n = -1$ pour tout entier n. Si (u_n) est périodique, les deux suites (v_n) et (w_n) seront systématiquement constantes (égales au maximum et au minimum des termes apparaissant sur une période de la suite).
3. Par définition, v_{n+1} est la borne supérieure d'un ensemble inclus dans celui dont v_n est la borné supérieure (on a simplement enlevé l'élément u_n, à condition qu'il ne réaparaisse parmi les termes ultérieurs de la suite). Or, si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ (en effet, tout majorant de B est a fortiori un majorant de A, donc $\sup(B)$ est un majorant de A, ce qui assure l'inégalité souhaitée), donc $v_{n+1} \leqslant v_n$. De façon complètement symétrique, $w_{n+1} \geqslant w_n$. De plus, les deux suites sont bornées par les mêmes bornes que (u_n). On a donc une suite croissante majorée et une suite décroissante minorée, qui convergent toutes les deux. On peut aller un peu plus loin en signalant que l'inégalité $w_n \leqslant v_n$ (une borne inférieure est plus petite que la borne supérieure du même ensemble) assure que $l_w \leqslant l_v$.
4. On peut remarquer tout simplement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ (le terme u_n faisant partie de l'ensemble dont v_n et w_n sont les bornes supérieure et inférieure), et appliquer directement le théorème des gendarmes. La réciproque est vraie, mais il faut un peu plus de soin pour la prouver : si (u_n) converge vers l et $\varepsilon > 0$, alors il existe un n_0 à partir duquel $l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$. Puisque tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont dans cet intervalle, leurs bornes supérieure et inférieure également, donc $\forall n \geqslant n_0$, on a $l - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant l + \varepsilon$, et de même pour w_n, ce qui prouve la convergence des deux suites vers l.
5. En posant $k = l_v - \varepsilon$, avec donc $\varepsilon > 0$, on applique simplement le résultat de la question précédente pour prouver que tous les termes d'indice supérieur ou égal à n_0 sont plus grands que k, ce qui en fait bien une infinité. Au contraire, si $k = l_v + \varepsilon$, toujours avec $\varepsilon > 0$, il n'y a que les termes d'indice inférieur à n_0 (qui sont en nombre fini) qui peuvent être plus grands que k.
6. Supposons par l'absurde qu'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) converge vers une limite $l > l_v$, et posons $\varepsilon = \frac{l - l - v}{2} > 0$. À partir d'un certain rang, on aura donc $l - \varepsilon \leqslant u_{\varphi(n)}$ (seule cette inégalité nous intéresse ici), condition qui doit donc être vérifiée par une infinité

de termes de la suite (u_n) initiale. Comme $l-\varepsilon > l_v$ par définition de ε, cela contredit les résultats de la question 5, c'est donc absurde, et on a nécessairement $l \leqslant l_v$.

7. Posons $k_n = l_v - \dfrac{1}{n}$ (pour tout entier $n \geqslant 1$). Comme $k_n < l_v$, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) supérieurs ou égaux à k_n (cf question 5). Comme par ailleurs il n'existe qu'un nombre fini de termes de la suite plus grands que $l_v + \dfrac{1}{n}$ (toujours d'après la question 5), on a donc toujours une infinité de termes de la suite vérifiant $|u_n - l_v| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On peut alors construire une sous-suite de (u_n) convergeant vers l_v de la façon suivante : on choisit $u_{\varphi(1)}$ comme étant le premier terme de la suite vérifiant $|u_{\varphi(1)} - l_v| \leqslant 1$ (il y a une infinité à disposition, on a l'embarras du choix), puis $u_{\varphi(2)}$ comme étant le premier terme de la suite d'indice supérieur à $\varphi(1)$ vérifiant $|u_{\varphi(2)} - l_v| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (là encore, il y une infinité de termes vérifiant l'inégalité, on peut donc en trouver un dont l'indice convient), et ainsi de suite, $u_{\varphi(n)}$ étant le premier terme de la suite d'indice plus grand que $\varphi(n-1)$ vérifiant $|u_{\varphi(n)} - l_v| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Cette sous-suite converge par construction vers l_v. On a ainsi prouvé un résultat légèrement plus précis que le théorème de Bolzano-Weierstra vu en cours : pour une suite bornée, il existe toujours une sous-suite convergeant vers sa limite supérieure. On prouverait de même qu'il existe une sous-suite convergeant vers l_w et même, avec un tout petit peu plus d'effort vers n'importe quelle limite $l \in [l_w, l_v]$.

8. (a) Notons l et l' les limites supérieures respectives de z et de u. Supposons par l'absurde que la limite supérieure l'' de la suite produit $(u_n z_n)$ soit strictement supérieure à ll'. Il existe alors une sous-suite de $(u_n z_n)$, qu'on peut noter $(u_{\varphi(n)} z_{\varphi(n)})$ qui converge vers l''. En posant $\varepsilon = \dfrac{l'' - ll'}{2}$, qui est strictement positif par hypothèse, tous les termes de la sous-suite vérifieront à partir d'un certain rang l'inégalité $u_{\varphi(n)} z_{\varphi(n)} \geqslant l'' - \varepsilon = ll' + \varepsilon$. Choisissons maintenant un $\eta > 0$ tel que $(l+\eta)(l'+\eta) < ll' + \varepsilon$ (un tel réel existe nécessairement puisque la limite du produit $(l+\eta)(l'+\eta)$ est égale à ll' quand η tend vers 0). Un indice pour lequel $u_n < l' + \eta$ et $z_n < l + \eta$ vérifie donc $u_n z_n \leqslant ll' < \varepsilon$. Il existe donc une infinité d'indice qui ne vérifient **pas** les deux hypothèses simultanément, donc pour lesquels on a soit $u_n \geqslant l' + \eta$, soit $z_n \geqslant l + \eta$. Il en existe donc aussi une infinité qui vérifient la première hypothèse, ou une infinité qui vérifient la seconde. Dans les deux cas, cela contredit les résultats démontrés en question 5.

   (b) Il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ de la suite (z_n) convergeant vers sa limite supérieure l. La suite (u_n) étant convergente, la sous-suite correspondante $(u_{\varphi(n)})$ converge vers sa limite l' (qui coïncide bien sûr avec sa limite supérieure dans ce cas). On en déduit que $(z_{\varphi(n)} u_{\varphi(n)})$ converge vers ll', qui est donc inférieure ou égale à la limite supérieure l'' de zu (question 6). Comme on vient par ailleurs de prouver que $l'' \leqslant ll'$, on a donc nécessairement égalité.

   (c) Prenons par exemple deux suites périodiques de période 2, en posant $u_n = (-1)^n$ et $z_n = (-1)^{n+1}$. Les deux suites ont une limite supérieure égale à 1, mais leur produit est la suite constante égale à -1, qui a bien sûr pour limite supérieure -1.

9. Il s'agit simplement de reprendre la dernière question de la première partie et de la rédiger beaucoup plus légèrement. Puisque u_n est minorée par une suite convergeant vers $\dfrac{1}{4}$, elle a une limite inférieure supérieure ou égale à $\dfrac{1}{4}$ (qui est bien sûr la limite inférieure de la suite minorante). De même, la limite supérieure de (u_n) est majorée par k^2, limite de la suite majorante obtenue en question *A.2.d*. Mais comme cette majoration doit être vraie pour tout réel $k \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, la limite supérieure est donc majorée par $\dfrac{1}{4}$. Comme elle est plus grande que la limite inférieure, elles sont toutes les deux égales à $\dfrac{1}{4}$, ce qui prouve la convergence de (u_n)

vers $\frac{1}{4}$.