Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 6

MPSI Lycée Camille Jullian

28 janvier 2023

Exercice 1

On considère l'équation $x^2+y^2=7z^2$, dont on cherche à déterminer les solutions entières $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$.

1. Expliquer pourquoi on peut se restreindre à chercher les solutions $(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$.
2. On suppose que (x_0,y_0,z_0) est une solution non triviale du problème (autrement dit, $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$).
   (a) Montrer qu'on peut en déduire une solution $(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{N}^3$ vérifiant de plus $\mathrm{pgcd}(x_1,y_1,z_1)=1$.
   (b) Déterminer l'ensemble des carrés de tous les entiers modulo 7, ainsi que les opposés de ces carrés (on pourra présenter les résultats sous forme de tableau).
   (c) En raisonnant modulo 7, en déduire que x_1 et y_1 sont tous les deux divisibles par 7.
   (d) En déduire une absurdité et conclure.
3. Montrer que l'équation $x^2+y^2=5z^2$ admet par contre une infinité de solutions non triviales. En existe-t-il pour lesquelles $x=42$? Ou pour lesquelles $z=42$? Question bonus à ne faire que si vous avez trouvé le reste de l'exercice trivial : mêmes questions pour l'équation $x^2+y^2=13z^2$.

Exercice 2

On va travailler dans tout cet exercice avec des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On note simplement I la matrice identité d'ordre 3, et pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $E_A=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid AM=M\}$ et $F_A=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid A^2M=AM\}$.

1. Déterminer les ensembles E_A et F_A lorsque $A=0$, puis lorsque $A=I$.
2. Montrer de façon générale que $E_A\subset F_A$, et que $E_A=F_A$ si la matrice A est inversible.
3. On pose dans cette question $C=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $P^3=3P^2-P-I$. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
   (b) Calculer le produit $D=P^{-1}CP$ (qui doit être une matrice diagonale).
   (c) Si $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N=P^{-1}M$. Montrer que $M\in E_C\Leftrightarrow N\in E_D$ (avec les notations définies en début d'exercice).
   (d) Déterminer toutes les matrices appartenant à E_D, en déduire E_C.
   (e) Calculer de même F_D puis F_C. A-t-on $F_C=E_C$? Que peut-on en déduire sur la matrice C en reprenant les résultats de la question 2 ?
4. On souhaite calculer les puissances de la matrice C définie à la question précédente (cette question est **complètement indépendante** du reste de l'exercice).
   (a) Calculer C^2 et C^3, puis déterminer deux constantes réelles a et b telles que $C^3=aC^2+bC$.
   (b) En déduire rigoureusement que la matrice C n'est pas inversible.
   (c) Montrer que, $\forall n\geqslant 1$, $\exists(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$, $C^n=a_nC^2+b_nC$.
   (d) Calculer explicitement les valeurs de a_n et b_n, en déduire une expression de C^n (on ne demande pas d'écrire explicitement la matrice C^n).

Problème

A. Étude de relations de récurrence faisant intervenir une racine carrée.

1. On considère dans cette question une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$, avec $u_0 = a \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Montrer que (u_n) est bien définie pour tout entier naturel n.
   (b) En posant $v_n = \ln(u_n)$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (v_n).
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n et de a, puis celle de u_n.
   (d) La suite (u_n) converge-t-elle ? Vers quelle limite ? Cete limite serait-elle modifiée si on remplaçait la relation $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ par la relation $u_{n+1} = 42\sqrt{u_n}$ (on justifiera la réponse sans rentrer dans le détail des calculs) ?
2. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = b \in \left[\frac{1}{16}, 16\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}\sqrt{u_n}$.
   (a) Calculer les premiers termes de la suite (jusqu'à u_4) lorsque $b = 1$.
   (b) Montrer dans le cas général que $\frac{1}{16} \leqslant u_n \leqslant 16$ (ce qui prouve en passant que la suite est bien définie).
   (c) Soit $k \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, montrer qu'à partir d'un certain rang N, l'encadrement $\frac{1}{2}\sqrt{u_n} \leqslant u_{n+1} \leqslant k\sqrt{u_n}$ sera vérifié.
   (d) Montrer que, $\forall n \geqslant N$, $\frac{1}{4}(4u_N)^{\frac{2^N}{2^n}} \leqslant u_n \leqslant k^2 \left(\frac{u_N}{k^2}\right)^{\frac{2^N}{2^n}}$.
   (e) En déduire rigoureusement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

B. Limites inférieures et supérieures de suites bornées.

Dans toute cette partie, (u_n) est une suite bornée. On notera (v_n) et (w_n) les deux suites définies par $v_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\}$ et $w_n = \inf\{u_k \mid k \geqslant n\}$ (on calcule donc les bornes inférieures et supérieures des termes de la suite initiale à partir du rang n pour obtenir la valeur de v_n et de w_n). À l'exception de la question 9, cette partie B est indépendante de la partie A.

1. En posant $u_n = \frac{1}{n+1}$, que valent v_n et w_n ? Généraliser ce résultat à une suite décroissante bornée quelconque.
2. Que valent v_n et w_n lorsque $u_n = (-1)^n$? Que peut-on plus généralement dire de ces deux suites quand (u_n) est périodique ?
3. Dans le cas général, montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones et convergentes. On note l_v et l_w leurs limites respectives, appelées limite supérieure et limite inférieure de la suite (u_n).
4. Montrer que, si $l_v = l_w$, alors la suite (u_n) converge. La réciproque est-elle vraie ?
5. Montrer que, si $k < l_v$, l'ensemble des termes de la suite (u_n) supérieurs ou égaux à k est infini. Montrer au contraire que, si $k > l_v$, cet ensemble est fini.
6. Montrer que, si une sous-suite de la suite (u_n) converge, alors sa limite est inférieure ou égale à l_v.
7. Montrer qu'il existe toujours une sous-suite de (u_n) convergeant vers l_v (on exploitera les résultats de la question 5). Quel résultat du cours vient-on de redémontrer ?
8. Soient (u_n) et (z_n) deux suites bornées et positives.
   (a) Montrer que la limite supérieure du produit $(u_n z_n)$ est majorée par le produit des limites supérieures de (u_n) et de (z_n).
   (b) Montrer que cette majoration est une égalité dans le cas où (u_n) est une suite convergente.
   (c) Donner un contre-exemple à cette égalité dans le cas général.
9. Redémontrer la convergence vers $\frac{1}{4}$ de la suite (u_n) définie à la question $A.2$ en montrant que ses limites supérieure et inférieure sont égales à $\frac{1}{4}$.