Devoir Surveillé n° 5 : corrigé

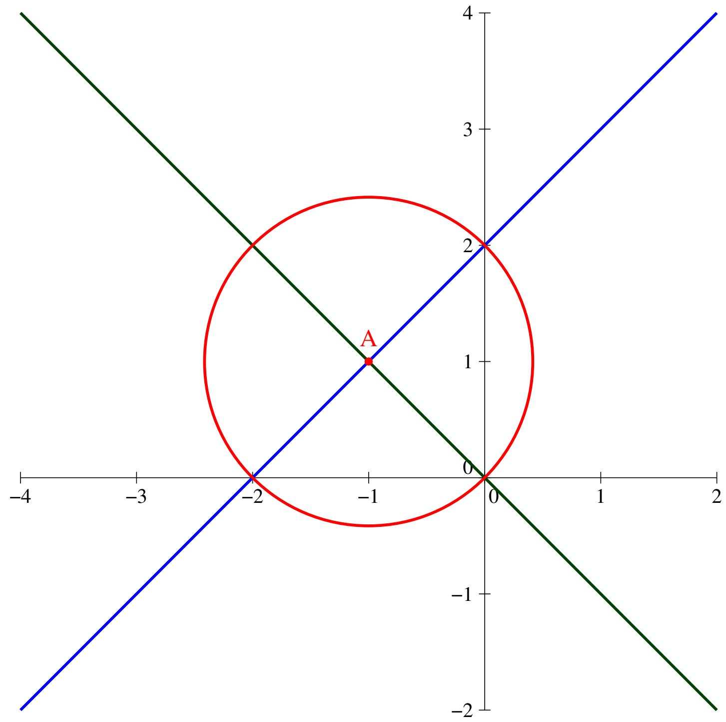
MPSI Lycée Camille Jullian

7 janvier 2023

Exercice 1

1. Calculons donc : $f(2) = \dfrac{2-2i}{4} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$, puis $f(2-i) = \dfrac{2-3i}{4-i} = \dfrac{(2-3i)(4+i)}{17} = \dfrac{11}{17} - \dfrac{10}{17}i$, et enfin $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+2+i} = \dfrac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}+2+i)}{(\sqrt{3}+2)^2+1} = \dfrac{6+2\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+6)i}{8+4\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}+3}{4+2\sqrt{3}}i = \dfrac{(3+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}{16-4} - \dfrac{(\sqrt{3}+3)(4-2\sqrt{3})}{16-4}i = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2}i$.
2. Cherchons directement l'expression de la réciproque en résolvant l'équation $f(z) = Z$, c'est-à-dire $\dfrac{z-2i}{z+2} = Z$, qui donne $z - 2i = zZ + 2Z$, soit $z(1-Z) = 2Z + 2i$. Cette équation ne peut pas avoir de solution quand $Z = 1$ (qui est donc le seul complexe à ne pas avoir d'antécédent par f), et en a exactement un le reste du temps, égal à $z = \dfrac{2Z+2i}{1-Z}$. On a donc prouvé que f était bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que sa réciproque est définie par $f^{-1}(Z) = \dfrac{2Z+2i}{1-Z}$.
3. L'équation s'écrit $\dfrac{z-2i}{z+2} = \dfrac{z}{2}$, soit $z - 2i = \dfrac{1}{2}z^2 + z$, ou encore $z^2 = -4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Pas besoin de passer par la forme algébrique ici pour obtenir les racines carrées, elles sont évidentes sous forme exponentielle : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, et $z_2 = -z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.
4. Pour cela, on va simplement poser $z = a + ib$ et calculer $f(z) = \dfrac{a+i(b-2)}{a+2+ib}$ $= \dfrac{(a+i(b-2))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2} = \dfrac{a^2+2a-iab+iab-2ia+2ib-4i+b^2-2b}{(a+2)^2+b^2}$ $= \dfrac{a^2+2a+b^2-2b+i(2b-2a-4)}{(a+2)^2+b^2}$. En particulier, $f(z)$ est réel si sa partie imaginaire est nulle, donc si $2b - 2a = 4$, ou encore $b = a + 2$. On reconnait bien sûr ici l'équation d'une droite dans le plan complexe (d'équation $y = x + 2$), qui sera représentée en bleu sur la figure qui suit le corrigé de la question 5. Si on est très rigoureux, on signale qu'il faut enlever à cette droite le point d'affixe -2.
5. On reprend le calcul précédent, et on veut cette fois-ci que la partie réelle s'annulle, donc que $a^2 + 2a + b^2 - 2b = 0$. On reconnait une équation de cercle : $(a+1)^2 + (b-1)^2 = 2$, cercle de centre $A(-1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$, représenté en rouge ci-dessous. Là encore, il faut enlever le point d'affixe -2.
6. Il vaut mieux cette fois-ci éviter de reprendre l'expression algébrique de $f(z)$, et plutôt remonter un peu plus haut : on veut $\left|\dfrac{z-2i}{z+2}\right| = 1$, soit $|z-2i| = |z+2|$, ou encore $|z-2i|^2 = |z+2|^2$. On peut maintenant poser profitablement $z = a + ib$ pour obtenir l'équation $a^2 + (b-2)^2 = (a+2)^2 + b^2$, soit en développant et en simplifiant brutalement $-4b = 4a$, donc $b = -a$. Il s'agit donc simplement de la droite d'équation $y = -x$. On pouvait

aussi terminer à l'aide d'une interprétation géométrique : l'égalité $|z - 2i| = |z + 2|$ signifie que le point d'affixe z est équidistant des deux points d'affixes $2i$ et -2, et donc situé sur la médiatrice de ces deux points, qui est bien la droite d'équation $y = -x$. La droite est en vert sur la sublime figure suivante :



7. (a) Je propose intelligemment de poser $z = 2e^{i\theta}$, et de calculer $f(z) = \dfrac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + 1} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta} + 1} = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}(e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} - e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{2i\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{2\cos(\frac{\theta}{2})}$, ce qui donne bien la formule de l'énoncé en remplaçant le i restant au numérateur par un $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

   (b) Le nombre calculé à la question précédente est de la forme $ke^{i\frac{3\pi}{4}}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Il a donc un argument égal à $\dfrac{3\pi}{4}$ (si k est positif) ou à $-\dfrac{\pi}{4}$ (si k est négatif). Dans les deux cas, il appartient à la droite d'équation $y = -x$ (oui, celle-là même qu'on a déjà croisée un peu plus haut dans ce même exercice).

   (c) L'affixe d'un point de cette droite peut s'écrire sous la forme $Z = a - ai$, avec $a \in \mathbb{R}$. Calculons alors $f^{-1}(Z) = \dfrac{2a - 2ai + 2i}{1 - a + ai} = 2 \times \dfrac{a + i(1-a)}{1 - a + ai}$. Or, $\left|\dfrac{a + i(1-a)}{1 - a + ai}\right| = \sqrt{\dfrac{a^2 + (1-a)^2}{(1-a)^2 + a^2}} = 1$, donc $|f^{-1}(Z)| = 2$. Autrement dit, $f^{-1}(Z) \in \mathcal{C}$, ce qui prouve bien que Z est l'image d'un élément de $\mathcal{C}$ et donc que $f(\mathcal{C})$ est exactement la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 2 (bac 2003)

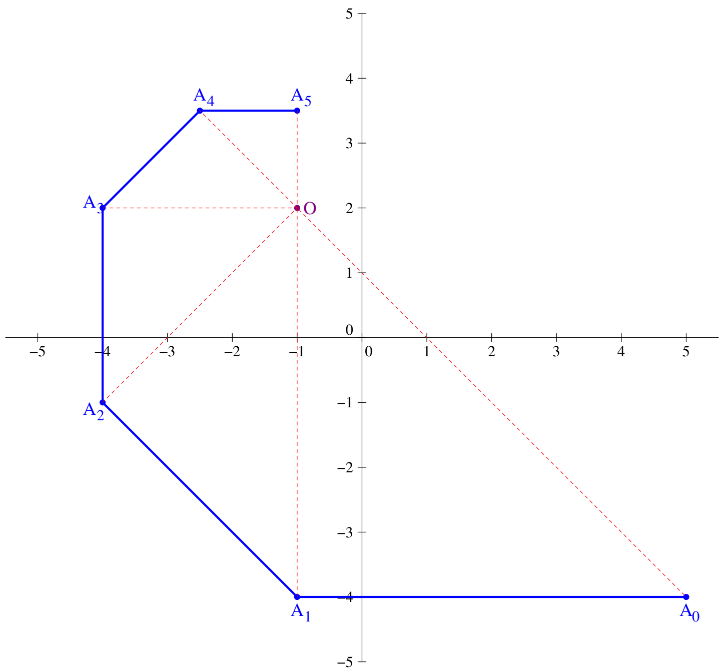
1. Comme toute similitude directe qui se respecte, s a une expression complexe de la forme $s(z) = az + b$. Les deux images données par l'énoncé imposent donc $a(5 - 4i) + b = -1 - 4i$ et $a(-1 - 4i) + b = -4 - i$. En soustrayant ces deux équations, on obtient $6a = 3 - 3i$, soit $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$. On en déduit (en reprenant par exemple la première équation) que $b =$

$-1-4i-(5-4i)\times\dfrac{1-i}{2}=-1-4i-\dfrac{1-9i}{2}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$. IL ne reste plus qu'à conclure : $s(z)=\dfrac{1-i}{2}z+\dfrac{i-3}{2}$.

2. L'angle et le rapport sont obtenus en écrivant le coefficient a sous forme exponentielle, ce qui est ici très facile : $|a|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. La similitude s a donc pour rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
Pour obtenir l'affixe du centre, on cherche le point fixe de s en résolvant $s(z)=z$, soit $\dfrac{-1-i}{2}z+\dfrac{i-3}{2}=0$, donc $z=\dfrac{3-i}{-1-i}=\dfrac{(3-i)(-1+i)}{2}=-1+2i$. La similitude s a donc pour centre $\Omega(-1+2i)$.

3. Les calculs précédents montrent que $z'=\dfrac{1-i}{2}z+\dfrac{i-3}{2}$, donc $z-z'=\dfrac{1+i}{2}z+\dfrac{3-i}{2}$. Calculons maintenant $\omega-z'=-1+2i-\dfrac{1-i}{2}z-\dfrac{i-3}{2}=\dfrac{1+3i}{2}+\dfrac{i-1}{2}z=\dfrac{i(3-i)}{2}+\dfrac{i(1+i)}{2}z=i(z-z')$. On en déduit en particulier que $\dfrac{\omega-z'}{z-z'}\in i\mathbb{R}$, et donc que $\arg\left(\dfrac{\omega-z'}{z-z'}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Autrement dit, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'.

4. (a) Même si ce n'était pas demandé puisqu'il fallait une construction géométrique (en exploitant bien sûr le triangle rectangle constaté à la question précédente), signalons les affixes des points suivants : $z_3=\dfrac{(1-i)(-4-i)}{2}+\dfrac{i-3}{2}=-4+2i$, puis $z_4=\dfrac{(1-i)(-4+2i)}{2}+\dfrac{i-3}{2}=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{2}i$, et $z_5=\dfrac{(1-i)(-5+7i)}{4}+\dfrac{i-3}{2}=-1+\dfrac{7}{2}i$. Sur la figure, le centre de la similitude est noté O et par Ω (je n'ai tout bêtement pas accès aux lettres grecques avec le logiciel que j'utilise pour mes figures).



(b) Calculons donc les distances à l'aide de modules : $u_0=A_0A_1=|z_0-z_1|=|6|=6$, et $u_1=A_1A_2=|z_A-z_2|=|3-3i|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$. Comme $s(A_n)=A_{n+1}$ et $s(A_{n+1})=A_{n+2}$, le segment $[A_{n+1}A_{n+2}]$ est donc l'image par s du sement $[A_nA_{n+1}]$. Comme s est une similitude, on a donc toujours un rapport de longueurs égal au rapport de s, soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La suite (u_n) sera donc géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Comme son premier terme est égal à 6, on en déduit immédiatement que $u_n = \dfrac{6}{2^{\frac{n}{2}}}$.

(c) C'est une somme géométrique : $v_n = 6\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = 6\times\frac{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{6}{\sqrt{2}^n}\times\frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1}$.

5. Comme le triangle en question est rectangle, le rayon de son cercle circonscrit est simplement la longueur de son hypothénuse. La suite (r_n) est donc également géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et de premier terme $\Omega A_0 = |-1+2i-5+4i| = |-6+6i| = 6\sqrt{2}$ (on constate en passant si on ne l'avait pas déjà fait avant que tous les triangles sont en fait isocèles en plus d'être rectangles). On a donc $r_n = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}^n} = \dfrac{6}{\sqrt{2}^{n-1}}$.

6. Il faut pour cela avoir $\dfrac{6}{\sqrt{2}^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{100}$, donc $\sqrt{2}^{n-1} \geqslant 600$. On sait que $2^9 = \sqrt{2}^{18} = 512$, donc $\sqrt{2}^{19} > 600$, il faut attendre $n_0 = 19$.

Problème

I. Un peu d'algèbre.

1. Pour la somme c'est facile, $h+h' = (1+2i, 5-2i)$. Mais pour **les** produits (ce n'est pas une faute de frappe, le produit n'étant ici pas commutatif, il y a bien deux calculs à faire), c'est un peu plus pénible. En posant $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$, $z_1' = i$ et $z_2' = 3-i$, on calcule d'abord $z_1z_1' - z_2\overline{z_2'} = (1+i)i - (2-i)(3+i) = i-1-6-2i+3i-1 = -8+2i$ et $z_1z_2' + z_2\overline{z_1'} = (1+i)(3-i)-(2-i)i = 3-i+3i+1-2i-1 = 3$ pour en déduire que $hh' = (-8+2i, 3)$. Mais il faut ensuite recommencer dans l'autre sens : en posant $z_1 = i$, $z_2 = 3-i$, $z_1' = 1+i$ et $z_2' = 2-i$, on aura cette fois-ci $z_1z_1' - z_2\overline{z_2'} = i(1+i)-(3-i)(2+i) = i-1-6-3i+2i-1 = -8$ et $z_1z_2'+z_2\overline{z_1'} = i(2-i)+(3-i)(1-i) = 2i+1+3-3i-i-1 = 3-2i$, donc $h'h = (-8, 3-2i)$. Les deux produits obtenus se ressemblent un peu mais ne sont manifestement pas égaux.

2. Comme on ne peut hélas pas voir $\mathbb{H}$ comme un sous-anneau d'une structure déjà connue, on a des tonnes de choses à vérifier :

   - l'addition dans $\mathbb{H}$ est une lci (c'est clair puisque le résultat de cette addition est un couple de nombres complexes, donc un élément de $\mathbb{H}$) associative (évident puisqu'on se contente de faire séparément deux sommes de nombres complexes, et que l'addition sur $\mathbb{C}$ est associative) et commutative (là encore évident vu la commutativité de l'addition sur $\mathbb{C}$).
   - l'élément 0 (ou si on préfère $(0,0)$) est élément neutre pour l'addition.
   - tout quaternion $h = (z_1, z_2)$ admet un opposé égal à $-h = (-z_1, -z_2)$ (évident).
   - le produit est une lci (le résultat est encore une fois un couple de nombres complexes) qui n'est pas commutative d'après le calcul de la question 1. Vérifions par contre son associativité en posant $h = (z_1, z_2)$, $h' = (z_1', z_2')$ et $h'' = (z_1'', z_2'')$. On calcule alors péniblement $(hh')h'' = ((z_1z_1' - z_2\overline{z_2'})z_1'' - (z_1z_2' + z_2\overline{z_1'})\overline{z_2''}, (z_1z_1' - z_2\overline{z_2'})z_2'' + (z_1z_2' + z_2\overline{z_1'})\overline{z_1''}) = (z_1z_1'z_1'' - z_2\overline{z_2'}z_1'' - z_1z_2'\overline{z_2''} - z_2\overline{z_1'}\,\overline{z_2''}, z_1z_1'z_2'' - z_2\overline{z_2'}z_2'' + z_1z_2'\overline{z_1''} + z_2\overline{z_1'}\,\overline{z_1''})$. Comme le produit n'est pas commutatif, on ne peut pas même pas utiliser une quelconque invariance par permutation des variables (qui d'ailleurs ne marcherait pas), on doit faire l'autre calcul : $h(h'h'') = (z_1(z_1'z_1'' - z_2'\overline{z_2''}) - z_2(\overline{z_1'z_2''} + \overline{z_2'}z_1''), z_1(z_1'z_2'' + z_2'\overline{z_1''}) + z_2(\overline{z_1'z_1''} - \overline{z_2'}z_2''))$. Le développement donne bien les mêmes termes que lors du premier calcul (ouf !).
   - le quaternion $1 = (1,0)$ est élément neutre pour le produit : si $z_1 = 1$ et $z_2 = 0$, le produit se résume bien à (z_1', z_2'), et de même dans l'autre sens : si $z_1' = 1$ et $z_2' = 0$, il ne reste dans le résultat du produit que (z_1, z_2).

- enfin, le produit est distributif par rapport à la somme : avec les mêmes notations que pour l'associativité du produit, $h\times(h'+h'') = (z_1,z_2)\times(z_1'+z_1'', z_2'+z_2'') = (z_1z_1'+z_1z_1''-z_2\overline{z_2'}-z_2\overline{z_2''}, z_1z_2'+z_1z_2''+z_2\overline{z_1'}+z_2\overline{z_1''}) = hh'+hh''$ (il suffit de séparer les termes contenant des $z'1$ ou des z_2' de ceux contenant des z_1'' et $z''2$). La propriété découle en fait de façon évidente de la distributivité du produit sur la somme dans $\mathbb{C}$ et de la linéarité de la conjugaison (qui permet de séparer les termes). Le calcul dans l'autre sens de $(h'+h'')\times h$ est extrêmement similaire et fonctionne de la même façon.

3. Si $h = (x, 0)$ et $h' = (z_1', z_2')$, on calcule sans difficulté $h \times h' = (xz_1', xz_2') = h' \times h$ (en utlisant pour le deuxième calcul le fait que $\overline{x} = x$ puisque x est réel), ce qui prouve que les éléments commutent.

4. (a) Si $h = (z_1, z_2)$ avec $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ (attention, ici, i désigne le nombre complexe et pas le quaternion), alors $h = a(1, 0) + b(i, 0) + c(0, 1) + d(0, i)$ (cf calcul de la question précédente), donc $h = a + bi + cj + dk$.

   (b) Il n'y a pas trop d'autre choix que de revenir à la définition du produit et enchaîner les calculs. On obtient sans surprise $i^2 = -1$, mais aussi $j^2 = k^2 = -1$. Pour tous les produits restants, on peut gagner un peu de temps en constatant que $ijk = -1$. En multipliant ensuite cette égalité à gauche ou à droite par i ou k, on trouve assez rapidement $ij = k$, $ik = -j$, $ji = -k$, $jk = i$, $ki = j$ et $kj = -i$.

   (c) Par distributivité on peut tout développer et utiliser les résultats de la question précédente : $(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i - bb' + bc'k - bd'j + ca'j - cb'k - cc' + cd'i + da'k + db'j - dc'i - dd' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' - bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' - cb' + da')k$. On aurait bien entendu pu définir le produit dans $\mathbb{H}$ directement par cette formule, mais j'aurais alors catégoriquement refusé d'écrire les calculs de vérification de son associativité !

   (d) On peut par exemple constater que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2}ij + \frac{1}{2}ji + \frac{1}{2}j^2 = -1$ (bien pratique ici d'avoir $ji = -ij$, le « double produit » disparait purement et simplement). Bien sûr, on aura aussi pour la même raison $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}k\right)^2 = -1$. En fait, -1 admet une infinité de « racines carrées » dans l'ensemble $\mathbb{H}$.

   (e) En notant $h = a + bi + cj + dk$, si on veut avoir $hi = ih$, cela impose $ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj$, donc $-ck + dj = ck - dj$. Cette première condition ne peut déjà être vérifiée que si $c = d = 0$ (en admettant que l'écriture d'un quaternion sous la forme $a + bi + cj + dk$ est unique, ce qui est implicite dans l'énoncé), donc $h = a + bi$ (on a déjà prouvé en quelque sorte que h est un nombre complexe). Si on veut avoir en plus $hj = jh$, on obtient alors la condition supplémentaire $aj + bk = aj - bk$ qui impose $b = 0$, et notre nombre est donc nécessairement réel.

   (f) Il faut un peu de courage : $hi = ai - b - ck + dj$, puis $ihi = -a - bi + cj + dk$. On calcule de même $jhj = -a + bi - cj + dk$ et $khk = -a + bi + cj - dk$. On conclut : $h + ihi + jhj + khk = -2a + 2bi + 2cj + 2dk = -2\overline{h}$ avec les notations introduites à la question suivante.

5. (a) On calcule brutalement, par exemple en reprenant la formule de la question 4.c : la première « coordonnée » de $h\overline{h}$ est égale à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, la deuxième à $-ab + ba - cd + dc = 0$, la troisième à $-ac + bd + ca - db = 0$ et la dernière à $-ad - bc + cb + da = 0$. Il ne reste donc que $h\overline{h} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ qui est bien un élément de $\mathbb{R}^+$.

   (b) Posons donc comme d'habitude $h = a + bi + cj + dk$ et $h' = a' + b'i + c'j + d'k$, et calculons :

   - $\overline{h + h'} = \overline{h} + \overline{h'} = a + a' - (b + b')i - (c + c')j - (d + d')k$ (calcul évident pour le coup)
   - $\overline{h'} \times \overline{h} = (a' - b'i - c'j - d'k)(a - bi - cj - dk) = aa' - ba'i - ca'j - da'k - ab'i - bb' + cb'k - db'j - ac'j - bc'k - cc' + dc'i - ad'k + bd'j - cd'i - dd' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (dc' - ba' - ab' - cd')i + (bd' - db' - ca' - ac')j + (cb' - da' - bc' - ad')k$.

En reprenant l'expression du produit obtenue à la question 4.c, on constate que cette horrible expression est bien égale à $\overline{hh'}$.

- pas besoin de gros calcul pour la dernière vérification, $|hh'| = \sqrt{hh'\overline{hh'}} = \sqrt{h(h'\overline{h'})\overline{h}} = \sqrt{|h'|^2 h\overline{h}} = \sqrt{|h'|^2|h|^2} = |h| \times |h'|$ (attention à ne faire commuter que les normes qui sont des réels).

(c) En reprenant le calcul explicite de la question a, on a $|h| = 0$ si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Comme chacun des quatre carrés est positif (il s'agit ici de carrés de nombres réels), ça ne peut se produire que si $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0$, donc si $a = b = c = d = 0$, et dans ce cas on a bien sûr $h = 0$.

(d) Par définition, $h \times \overline{h} = |h|^2$. Comme le membre de droite de cette égalité est un réel non nul (car $h \neq 0$), on peut le faire passer de l'autre côté : $h \times \dfrac{\overline{h}}{|h|^2} = 1$. De même, $\dfrac{\overline{h}}{|h|^2} \times h = 1$, donc h est inversible et $h^{-1} = \dfrac{\overline{h}}{|h|^2}$. C'est exactement la même formule que pour les nombres complexes.

(e) On a désormais prouvé tout ce qu'il faut pour que $(\mathbb{H}, +, \times)$ soit un corps non commutatif.

(f) Non, ou plutôt, on peut donner **deux** sens à cette division : si h et h' sont deux quaternions (avec $h' \neq 0$), on peut effectuer la division à gauche de h par h' en calculant $(h')^{-1} \times h$, mais aussi la division à droite de h par h' en calculant $h \times (h')^{-1}$. Les deux résultats obtenus n'ont aucune raison d'être identiques.

(g) Constatons simplement que $|\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1$, et de même $|\cos(\beta)+\sin(\beta)j| = 1$ (calcul identique). Comme la norme d'un produit est égale au produit des normes (question b), on en déduit immédiatement que $|h| = 1$. En développant, on aurait $h = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)i + \cos(\alpha)\sin(\beta)j + \sin(\alpha)\sin(\beta)k$. Un quaternion de module 1 est un nombre $h = a + bi + cj + dk$ vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Si on peut l'écrire sous la forme précédente, on constate que $a^2 + b^2 = \cos^2(\beta)$, et $c^2 + d^2 = \sin^2(\beta)$, ce qui impose les valeurs de $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ au signe près (comme la somme des deux réels $a^2 + b^2$ et $c^2 + d^2$ est égale à 1, on pourra toujours trouver un angle β convenable). De même, $a^2 + c^2 = \cos^2(\alpha)$ et $b^2 + d^2 = \sin^2(\alpha)$ (et ces deux nombres ont une somme égale à 1), ce qui permet de trouver un angle α convenable et définit de façon unique cet angle, au signe près de son sinus et de son cosinus. Il suffit alors de choisir les signes des cosinus et sinus des deux angles de façon à rexpecter les signes des quatre « coordonnées » du quaternion de départ pour que ça marche. Par exemple, si a et d sont positifs, et b et c négatifs, on prend $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ positifs, mais $\sin(\alpha)$ et $\sin(\beta)$ négatifs. Mais que se passera-t-il par exemple si a, b et c sont positifs, mais d négatif ? Les deux cosinus doivent alors être de même signe, et de même signe que les deux sinus, donc les deux sinus sont de même signe. Pourtant on veut que leur produit soit négatif, c'est manifestement impossible. Par exemple, $h = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i + \dfrac{1}{2}j - \dfrac{1}{2}k$, qui est un quaternion de norme 1, ne peut pas être écrit sous cette forme.

II. Des entiers à moitié entiers.

1. Si (a, b, c, d) sont entiers et (a', b', c', d') également, il est clair que $(a + a', b + b', c + c', d + d')$ seront entiers (au sens « entiers relatifs » ici). De même si les coordonnées de h et h' sont toutes demi-entières, la somme aura des coordonnées entières. Enfin, si l'un des deux quaternions a des coordonnées entières et l'autre des coordonnées demi-entières, leur somme aura des coordonnées demi-entières. Dans tous les cas, on aura bien $h + h' \in E$.

   Pour le produit, il est évident que ça fonctionne si h et h' ont des coordonnées entières (on reprend la formule explicite de la question $I.4.c$). Si l'un des deux (par exemple h') a des coordonnées demi-entières, notons $e' = a' + \frac{1}{2}$, $f' = b' + \frac{1}{2}$, $g' = c' + \frac{1}{2}$ et $h' = d' + \frac{1}{2}$ (qui sont donc entiers), alors $aa' - bb' - cc' - dd' = ae' - bf' - cg' - dh' - \frac{a-b-c-d}{2}$. Ce nombre est entier **ou** demi-entier selon la parité de l'entier $a - b - c - d$. Il en sera de même pour les trois dernières coordonnées du produit, cette fois-ci en fonction de la parité des entiers $a + b + c - d$, $a - b + c + d$ et $a + b - c + d$. Or, ces trois entiers ont la même parité que $a - b - c - d$ (par exemple, $a + b + c - d = (a - b - c - d) + 2(b + c)$, et on a un calcul quasi identique pour les deux autres). Les quatres coordonnées de hh' sont donc toutes entières, ou toutes demi-entières, ce qui prouve que $hh' \in E$. Si c'est h qui a des coordonnées demi-entières, le calcul est extrêmement similaire. Enfin, le cas où h et h' ont des coordonnées demi-entières se traite de la même façon : avec des notations adaptées du cas précédent, on calcule $aa' - bb' - cc' - dd' = \left(e - \frac{1}{2}\right)\left(e' - \frac{1}{2}\right) - \left(f - \frac{1}{2}\right)\left(f' - \frac{1}{2}\right) - \left(g - \frac{1}{2}\right)\left(g' - \frac{1}{2}\right) - \left(h - \frac{1}{2}\right)\left(h' - \frac{1}{2}\right) = ee' - ff' - gg' - hh' - \frac{e - f - g - h}{2} - \frac{e' - f' - g' - h'}{2} + 1$. Cette fois-ci, le résultat est entier ou demi-entier selon la parité de $e - f - g - h + e' - f' - g' - h'$. Là encore, les calculs des autres coordonnées font intervenir des entiers de parités identiques, ce qui prouve qu'on aura toujours $hh' \in E$.

Reste le passage à l'opposé mais là c'est complètement trivial, l'opposé d'un nombre demi-entier restant demi-entier. La conclusion de tout ça, c'est que E est un sous-anneau de $\mathbb{H}$, puisqu'il contient évidemment l'élément neutre 1 pour le produit des quaternions.

2. On calcul simplement $h + \overline{h} = 2a$ qui est en effet entier, que a soit entier ou demi-entier. Pour la norme, on distingue brillamment deux cas : si (a, b, c, d) sont entiers, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{N}$ de façon évidente, et s'ils sont demi-entiers, avec les notations désormais habituelles, $\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(g - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{1}{2}\right)^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 - e - f - g - h + 1$. Cette norme est bien entière (et positive comme toute norme).

3. (a) La norme d'un entier étant entière, on doit donc avoir $|h| \in \mathbb{N}$ et $|h^{-1}| \in \mathbb{N}$. Or, $|h^{-1}| = \frac{1}{|h|}$ (puisque leur produit est égal à $|1| = 1$). L'inverse d'un entier naturel n'est entier naturel que si cet entier est égal à 1, donc on a nécessairement $|h| = 1$. Réciproquement, si $|h| = 1$, on a tout simplement $h^{-1} = \overline{h}$ (cf question $I.5.d$) qui est un élément de E si h en est un.

   (b) Si on suppose que h a quatre coordonnées entières et que la somme de leurs carrés est égale à 1, il y en a nécessairement trois sur les quatre qui sont nulles et la quatrième égale à ± 1 (sinon la norme vaudra au moins 2). Autrement dit, on a huit unité à coordonnées entières : ± 1, $\pm i$, $\pm j$ et $\pm k$. Si les quatre coordonnées sont demi-entières, elles doivent toutes les quatre être égales à $\pm\frac{1}{2}$ (si une seule d'entre elle a une valeur absolue supérieure ou égale à $\frac{3}{2}$, son carré sera déjà nettement trop grand pour pouvoir avoir une norme égale à 1). Ça tombe bien, puisque dans ce cas la norme sera toujours égale à 1 : $4 \times \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Tous les quaternions de la forme $\pm\frac{1}{2} + \pm\frac{1}{2}i + \pm\frac{1}{2}j + \pm\frac{1}{2}k$ sont donc des unités. Il y a 16 unités de ce type (deux choix possibles pour chaque signe, qu'on peut effectuer indépendemment les uns des autres), soit au total 24 unités.

4. Supposons que $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $n' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$, alors on pose simplement $h = a + bi + cj + dk$ et $h' = a' + b'i + c'j + d'k$. Par construction, $n = |h|^2$ et $n' = |h'|^2$, avec $(h, h') \in E^2$ (et même plus précisément à coordonnées entières). Mais alors $hh' \in E$ (et hh' est aussi à coordonnées entières) et $nn' = |h|^2|h'|^2 = |hh'|^2$. Il suffit alors d'écrire hh' sous la forme $a'' + b''i + c''j + d''k$ pour en déduire que nn' est la sommes des carrés de ces coordonnées.

5. C'est en fait assez simple de découper chacun de ces entiers : par exemple $2 = (1+i)(1-i)$, et $1+i$ et $1-i$ sont des entiers qui ne sont pas des unités (même pas besoin de quaternions, les complexes suffisaient !). De même, on peut écrire $3 = (1+i+j)(1-i-j)$ (on multiplie $1+i+j$ par son conjugué, le résultat sera égal au carré de sa norme), $5 = (2+i)(2-i)$ ou $13 = (3-2i)(3+2i)$.