Devoir Surveillé n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

7 janvier 2023

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ par $f(z) = \dfrac{z-2i}{z+2}$.

1. Calculer (sous forme algébrique) les valeurs de $f(2)$, $f(2-i)$ et $f(e^{i\frac{\pi}{6}})$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ vers un ensemble à déterminer, et donner une expression de sa réciproque f^{-1} (un seul calcul nécessaire !).
3. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{z}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquelles $f(z) \in \mathbb{R}$ (on en donnera une description géométrique simple assortie d'une figure).
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquelles $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on en donnera une description géométrique simple assortie d'une figure).
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquelles $f(z) \in \mathbb{U}$ (on en donnera une description géométrique simple assortie d'une figure). Un bonus sera accordé aux élèves traitant cette question de deux façons différentes : par le calcul, et par un raisonnement géométrique.
7. On note $\mathcal{C}$ le cercle constitué par les nombres complexes de module 2, en excluant $z=-2$. On souhaite calculer $f(\mathcal{C})$.
   (a) En posant $z = 2e^{i\theta}$, prouver que $f(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ (la factorisation par l'angle moitié est votre amie).
   (b) En déduire que $f(z)$ appartient à une droite très simple.
   (c) Réciproquement, montrer que tout point de cette droite est l'image par f d'un élément de $\mathcal{C}$ (on pourra calculer l'image par f^{-1} d'un point de cette droite).

Exercice 2 (bac 2003)

Dans le plan complexe, on considère les trois points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4i$, $z_1 = -1-4i$ et $z_2 = -4-i$.

1. Déterminer l'expression complexe de l'unique similitude directe s vérifiant $s(A_0) = A_1$ et $s(A_1) = A_2$.
2. Préciser le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de cette similitude (on doit normalement obtenir un angle remarquable).
3. On considère un point M d'affixe z et son image $M' = s(M)$ d'affixe z'. Vérifier que $\omega - z' = i(z-z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega M M'$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = s(A_n)$, et $u_n = A_nA_{n+1}$ (distance entre les points A_n et A_{n+1}).
   (a) Faire une figure en plaçant les points A_0, A_1 et A_2 puis en construisant géométriquement A_3, A_4 et A_5.
   (b) Calculer explicitement u_0 et u_1, puis expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique.
   (c) En posant $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, calculer v_n en fonction de n.
5. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $r_n < 10^{-2}$.

Problème : étude sommaire de l'ensemble des quaternions.

On va étudier dans ce problème l'ensemble $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ muni des deux lois suivantes (**un** élément $h \in \mathbb{H}$ est décrit comme un **couple** de nombres complexes (z_1, z_2)) :

- $(z_1, z_2) + (z_1', z_2') = (z_1 + z_1', z_2 + z_2')$
- $(z_1, z_2) \times (z_1', z_2') = (z_1 z_1' - z_2 \overline{z_2'}, z_1 z_2' + z_2 \overline{z_1'})$

Un élément $h = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}$ est appelé **quaternion**. Le quaternion h est **réel** si $\mathrm{Im}(z_1) = 0$ et $z_2 = 0$ (la partie réelle de z_2 est donc nécessairement nulle). Dans ce cas, $h = (x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$, et on notera plus simplement $h = x$ (autrement dit, on identifie l'ensemble des réels à un sous-ensemble de $\mathbb{H}$, comme on le fait pour $\mathbb{C}$).

I. Un peu d'algèbre.

1. Calculer à l'aide de ces définitions la somme et les produits de $h = (1+i, 2-i)$ et de $h' = (i, 3-i)$.
2. Montrer que $(\mathbb{H}, +, \times)$ est un anneau non commutatif.
3. Montrer que les réels (définis dans l'introduction du problème) commutent avec tous les quaternions.
4. On note $i = (i, 0)$ (ce qui revient à identifier les nombres complexes à la première « coordonnée » du couple formant la définition des quaternions), $j = (0, 1)$ et $k = (0, i)$.
   (a) Montrer que tout élément $h \in \mathbb{H}$ peut s'écrire sous la forme $a+bi+cj+dk$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
   (b) Calculer tous les produits suivants (on pourra présenter les résultats sous forme de tableau, sans justification) : i^2, j^2, k^2, ij, ik, ji, jk, ki et kj.
   (c) En déduire une expression explicite (mais moche) du produit $(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)$.
   (d) Donner au moins deux solutions dans $\mathbb{H}$ de l'équation $h^2 = -1$ autres que i, j et k.
   (e) Montrer que les seuls quaternions qui commutent avec tous les autres sont les réels.
   (f) Soit $h = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, calculer $h + ihi + jhj + khk$.
5. Si $h = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on appelle **conjugué** de h le quaternion $\overline{h} = a - bi - cj - dk$. On appelle **norme** de h le nombre $|h| = \sqrt{h\overline{h}}$.
   (a) Justifier la définition de la norme, en montrant que $h\overline{h}$ est toujours un réel positif.
   (b) Montrer les propriétés suivantes, valables pour tous quaternions h et h' : $\overline{h + h'} = \overline{h} + \overline{h'}$, $\overline{hh'} = \overline{h'} \times \overline{h}$, $|hh'| = |h| \times |h'|$.
   (c) Montrer que $|h| = 0 \Leftrightarrow h = 0$.
   (d) Montrer que tout quaternion non nul est inversible, et exprimer h^{-1} en fonction de $|h|$ et de $\overline{h}$.
   (e) Que peut-on en déduire sur la structure algébrique de l'ensemble $\mathbb{H}$?
   (f) Peut-on donner un sens à la division de deux quaternions non nuls $\dfrac{h}{h'}$?
   (g) Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi[^2$. En notant $h = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i)(\cos(\beta) + \sin(\beta)j)$, vérifier que $|h| = 1$. Tous les quaternions de norme 1 peuvent-ils s'écrire sous cette forme ?

II. Des entiers à moitié entiers.

Un quaternion $h = a+bi+cj+dk$ est **entier** si $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ **ou** $\left(a - \dfrac{1}{2}, b - \dfrac{1}{2}, c - \dfrac{1}{2}, d - \dfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z}^4$. On note E l'ensemble des quaternions entiers.

1. Montrer que l'ensemble E est stable par somme, produit et passage à l'opposé. Que peut-on en déduire sur l'ensemble E ?
2. Montrer que, si $h \in E$, $h + \overline{h} \in \mathbb{Z}$, et $|h|^2 \in \mathbb{N}$.
3. Un élément $h \in \mathbb{H}$ est appelé **unité** de $\mathbb{H}$ si h et h^{-1} sont tous les deux entiers.
   (a) Montrer que $h \in E$ est une unité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $|h| = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe exactement 24 unités.
4. Montrer que, si n et n' sont deux entiers naturels qu'on peut écrire comme somme de quatre carrés, alors c'est aussi le cas de nn'.
5. Un entier $h \in E$ est **premier** si « $h = pq$ avec p et q entiers » implique que p ou q est une unité de $\mathbb{H}$. Montrer que les nombres 2, 3, 5 et 13 ne sont pas des nombres premiers dans E.