Devoir Surveillé n^o 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

1er décembre 2022

Exercice 1

1. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et pour racines $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. On constate immédiatement que $z_2 = j$. De plus, $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = z_1$.
2. On devrait ici reconnaitre sans calcul que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \dfrac{2\pi}{3} [2\pi]$.
3. Sous forme exponentielle, c'est évident : $j^3 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 = e^{i2\pi} = 1$. De plus, $j + j^2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -1$, donc $j^2 = -1 - j$.
4. Un petit dessin devrait suffire à se convaincre que le triangle est équilatéral (centré en l'origine du repère), mais comme on n'a pas encore parlé en cours de racines n-èmes de l'unité, on va le prouver à la main en calculant les longueurs des trois côtés : $PQ = |j - 1| = \left|-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$. De même, $PR = |j^2 - 1| = \left|-\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$, et enfin $QR = |j - j^2| = |j| \times |1 - j| = |1 - j| = \sqrt{3}$ puisque $|j| = 1$. Les trois côtés étant de même longueur, le triangle est bien équilatéral (de côté $\sqrt{3}$).
5. (a) On écrit par exemple $a - c = -jb - j^2c - c = -jb + c(-j^2 - 1) = -jb + jc = j(c - b)$ en exploitant en effet le résultat de la question 3.

   (b) En prenant les modules (et en se souvenant que $|j| = 1$), l'égalité précédente implique $|a - b| = |c - b|$, donc $AB = CB$, ce qui revient exactement à dire que ABC est isocèle en C.

   (c) On calcule cette fois-ci $a - b = -jb - j^2c - b = b(-j - 1) - j^2c = j^2b - j^2c = j^2(b - c)$. Comme $|j^2| = 1$, on en déduit cette fois-ci que $AB = BC$, le triangle a donc trois côtés égaux, il est bien équilatéral.

Exercice 2

1. (a) On dérive la fonction complexe de façon naturelle (i est une constante) : $w'(t) = y'(t) + iz'(t) = -2y(t) - z(t) + \cos(t) + iy(t) - 2iz(t) + i\sin(t) = (-2 + i)y(t) + (-1 - 2i)z(t) + e^{it}$. Comme $i(-2 + i) = -2i - 1$, on a bien $w'(t) = (-2 + i)(y(t) + iz(t)) + e^{it} = (-2 + i)w(t) + e^{it}$.

   (b) C'est une équation linéaire du premier ordre, d'équation homogène associée $w' + (2 - i)w = 0$. La fonction constante $t \mapsto 2 - i$ admet pour primitive $t \mapsto (2 - i)t$, et les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $w_h : t \mapsto Ke^{(-2+i)t}$, avec $K \in \mathbb{C}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(t) = ae^{it}$ (l'équation est à coefficients constants, pas besoin de faire de la variation de la constante, même si ça fonctionnerait très bien ici). On aura alors $y_p'(t) = aie^{it}$, et y_p est donc solution de l'équation complète si $aie^{it} = (-2+i)ae^{it} + e^{it}$, donc (après avoir simplifié par e^{it} qui ne s'annule jamais) $0 = -2a + 1$. On peut donc prendre $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{it}$. Les solutions de l'équation complète sont alors les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{1}{2}e^{it} + Ke^{(-2+i)t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

(c) Par définition, y et z sont les parties réelle et imaginaire de w. Détaillons le calcul : an posant $K = A + iB$, $w(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) + i\sin(t)) + (A + iB)(\cos(t) + i\sin(t))e^{-2t} = \frac{1}{2}\cos(t) + A\cos(t)e^{-2t} - B\sin(t)e^{-2t} + \frac{1}{2}i\sin(t) + iB\cos(t)e^{-2t} + iA\sin(t)e^{-2t}$. Les solutions du système initial sont donc les couples de fonctions (y, z) telles que $y(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + (A\cos(t) - B\sin(t))e^{-2t}$, et $z(t) = \frac{1}{2}\sin(t) + (B\cos(t) + A\sin(t))e^{-2t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (les deux constantes A et B devant bien sûr être les mêmes pour définir une solution du système).

2. (a) Les équations définissant le système initial le prouvent de façon immédiate, puisque les membres de droite de ces équations sont dérivables, donc y' et z' le sont également (en fait, nos solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$).

(b) On dérive la première équation pour obtenir $y'' = -2y' - z' - \sin(t)$, puis on remplace z' à l'aide de la deuxième équation du système : $y'' = -2y' - y + 2z - 2\sin(t)$. Enfin, on reprend la première équation pour obtenir $2z = -4y - 2y' + 2\cos(t)$, et on remplace dans l'équation dérivée qu'on vient d'obtenir : $y'' = -2y' - y - 4y - 2y' + 2\cos(t) - 2\sin(t)$, ce qui donne bien $y'' + 4y' + 5y = 2\cos(t) - 2\sin(t)$.

(c) L'équation obtenue est une équation du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 + 4r + 5 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$ et pour racines $r_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $r_2 = -2 - i$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $y_h : t \mapsto (A\cos(t) + B\sin(t))e^{-2t}$. Pour obtenir une solution particulière, on cherche d'abord une solution de l'équation complexe $y'' + 4y' + 5y = e^{it}$ sous la forme $z_c(t) = ae^{it}$. On calcule $y_c'(t) = aie^{it}$ et $y_c''(t) = -ae^{it}$. Cette fonction est solution de notre équation complexe si $(-a + 4ai + 5a)e^{it} = e^{it}$, donc si $a = \frac{1}{4+4i} = \frac{4-4i}{32} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$. Autrement dit, $y_c(t) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i\right)e^{it} = \frac{1}{8}\cos(t) - \frac{1}{8}i\cos(t) + \frac{1}{8}i\sin(t) + \frac{1}{8}\sin(t)$. En prenant les parties réelles et imaginaire de y_c, on obtient des solutions particulières des équations $y'' + 4y' + 5y = \cos(t)$ (une telle solution est donc $t \mapsto \frac{1}{8}\cos(t) + \frac{1}{8}\sin(t)$), et $y'' + 4y' + 5y = \sin(t)$ (cette fois-ci, $t \mapsto -\frac{1}{8}\cos(t) + \frac{1}{8}\sin(t)$ est solution). Par superposition, une solution de notre équation de départ est donc donnée par $y_p : t \mapsto \frac{2}{8}\cos(t) + \frac{2}{8}\sin(t) + \frac{2}{8}\cos(t) - \frac{2}{8}\sin(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto \frac{1}{2}\cos(t) + (A\cos(t) + B\sin(t))e^{-2t}$. Au signe de la constante près, ce sont exactement les solutions obtenues par la première méthode.

(d) En reprenant la première équation du système et les formules obtenues pour y, on calcule $z(t) = -2y(t) - y'(t) + \cos(t) = -\cos(t) - 2A\cos(t)e^{-2t} - 2B\sin(t)e^{-2t} + \frac{1}{2}\sin(t) + A\sin(t)e^{-2t} - B\cos(t)e^{-2t} + 2A\cos(t)e^{-2t} + 2B\sin(t)e^{-2t} + \cos(t) = \frac{1}{2}\sin(t) + A\sin(t)e^{-2t} - B\cos(t)e^{-2t}$, c'est-à-dire à nouveau les formules obtenues par la première méthode, le changement de signe étant le même que pour y. Mais comme on a dérivé une de nos équations pour obtenir ces formules par la deuxième méthode, il reste à vérifier que la deuxième équation du système est vérifiée (la première l'est forcément puisqu'on vient de l'utiliser pour calculer z) : $z'(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + A\cos(t)e^{-2t} - 2A\sin(t)e^{-2t} + B\sin(t)e^{-2t} + 2B\cos(t)e^{-2t}$, et $y(t) - 2z(t) + \sin(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + (A\cos(t) + B\sin(t))e^{-2t} - \sin(t) - 2A\sin(t)e^{-2t} + 2B\cos(t)e^{-2t} + \sin(t)$. Les deux expressions sont toujours égales, tous les couples de fonctions obtenus sont donc solutions du système initial.

Exercice 3

1. (a) Posons donc $y(x) = x^k$, pour obtenir $y'(x) = kx^{k-1}$ et $y''(x) = k(k-1)x^{k-2}$. La fonction y est solution de l'équation homogène si $k(k-1)x^k - kx^k + x^k = 0$, ce qui sera manifestement le cas si $k^2 - k - k + 1 = 0$, donc pour $k = 1$ (solution double de l'équation du second degré obtenue). En effet, $y(x) = x$ définit de façon assez triviale une solution de notre équation homogène.

   (b) On pose donc $y(x) = \frac{z(x)}{x}$, ce qui donne $y'(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}$, puis $y''(x) = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}$. On remplace tout dans l'équation initiale pour obtenir $xz'' - 2z' + \frac{2}{x}z - z' + \frac{1}{x}z + \frac{1}{x}z = 2x$, ce qui ne donne pas du tout l'équation souhaitée. On se rend alors compte de l'erreur d'énoncé et on pose plutôt $y(x) = xz(x)$. Cette fois-ci, $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$, et tout reporter dans l'équation initiale donne $2x^2z' + x^3z'' - xz - x^2z' + xz = 2x$, soit $x^3z'' + x^2z' = 2x$. Cette fois-ci, en divisant par x^2, on tombe bien sur $xz'' + z' = \frac{2}{x}$.

   (c) Histoire de bien rédiger, posons $w(x) = z'(x)$. La fonction w est donc solution (après normalisation) de l'équation du premier ordre $w' + \frac{1}{x}w = \frac{2}{x^2}$ (notée (E_{1b})). Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $w_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière en posant $w_p(x) = \frac{K(x)}{x}$ (variation de la constante), donc $w_p'(x) = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$. Cette fonction est solution de (E_{1b}) si $\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{K(x)}{x} = \frac{2}{x^2}$, donc si $K'(x) = \frac{2}{x}$. On prend $K(x) = 2\ln(x)$, donc $w_p(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$. Les solutions de E_{1b} sont donc toutes les fonctions de la forme $w : x \mapsto \frac{2\ln(x) + K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Puisqu'on a posé $w = z'$, il reste à calculer les primitives de ces fonctions (on veut ici **toutes** les solutions de l'équation (E_1), on ne peut pas se contenter de calculer une seule primitive). Comme $\frac{2\ln(x)}{x}$ est de la forme $2uu'$, avec $u(x) = \ln(x)$, on peut prendre comme primitive $\ln^2$. Les solutions de l'équation (E_1) sont donc toutes les fonctions de la forme $z : x \mapsto \ln^2(x) + K\ln(x) + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

   (d) Il ne reste plus qu'à remonter le changement de fonction : $y(x) = xz(x) = x\ln^2(x) + Kx\ln(x) + Lx$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) On dérive bien sûr deux fois : $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. En reportant dans l'équation (E), $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 2x$. On effectue le changement de variable : $t = \ln(x)$, donc $2x = 2e^t$, et on obtient bien $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t$.

   (b) Il s'agit d'une équation du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ a pour racine double $r_0 = 1$, les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $z_h : t \mapsto (At + B)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique et qu'on a un second membre de la forme $P(t)e^t$, avec P polynôme constant, on va chercher une solution particulière sous la forme $z_p(t) = at^2e^t$. On calcule $z_p'(t) = (2at + at^2)e^t$, puis $z_p''(t) = (2a+4at+at^2)e^t$. La fonction z_p est solution de (E_2) si $(2a+4at+at^2)e^t - (4at+2at^2)e^t + at^2e^t = 2e^t$, donc si $2a = 2$. Autrement dit, on peut poser $z_p(t) = t^2e^t$. Les solutions de (E_2) sont alors toutes les fonctions de la forme $z : t \mapsto (t^2 + At + B)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variable : $y(x) = z(\ln(x)) = (\ln^2(x) + A\ln(x) + B)x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Au nom des constantes près, on retrouve bien sûr les solutions obtenues par la première méthode.

3. On sait (croissance comparée) que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln^2(x) = 0$. Non seulement on peut prolonger certaines solutions par continuité en 0, mais on peut même toutes les prolonger puisqu'elles ont toujours une limite nulle. Passons à la dérivée : avec les formules de la question 1, $y'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + K\ln(x) + K + L = \ln(x)(\ln(x) + 2 + K) + K + L$. La parenthèse a toujours pour limite $-\infty$ en 0, il est donc impossible que $y'(x)$ ait une limite finie en 0. Aucune solution prolongée n'est donc dérivable en 0 (on aura systématiquement une tangente verticale).

4. On cherche dans cette question à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et vérifiant sur cet intervalle l'équation $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1$.

   (a) L'expression $xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1$ est dérivable puisque composée (et produit) de fonctions dérivables, donc f' est dérivable, ce qui prouve bien que f est deux fois dérivable (et même une infinité de fois).

   (b) Puisqu'on peut le faire, dérivons la condition proposée, après toutefois avoir tout divisé par x : $\frac{1}{x}f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, donc $-\frac{1}{x^2}f'(x) + \frac{1}{x}f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}$. Autrement dit, en multipliant tout par x^2, $xf''(x) - f'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right) + 1$. Or, en appliquant l'équation initiale à $\frac{1}{x}$, on a $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x) - 1$, on remplace dans l'équation précédente pour obtenir $xf''(x) - f'(x) = -\frac{1}{x}f(x) + 2$, soit après une dernière multiplication par x : $x^2f''(x) - xf'(x) + f(x) = 2x$. Incroyable, il s'agit là exactement de l'équation (E) !

   (c) Bien sûr, les calculs précédents prouvent qu'on a nécessairement $f(x) = x\ln^2(x) + Kx\ln(x) + Lx$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$, mais cette condition n'est pas forcément suffisante, on sait même très bien que dans ce genre de problème la dérivation initiale ajoute des solutions indésirables. Il faut donc vérifier. À partir de la formule qu'on vient de rappeler, $f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + K\ln(x) + K + L$ (calcul déjà effectué plus haut), et $xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1$ $= \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) + K\ln\left(\frac{1}{x}\right) + L - 1 = \ln^2(x) - K\ln(x) + L - 1$. Pour que les deux expressions coïncident, il faut que le coefficient devant le $\ln(x)$ et le coefficient constant soient les mêmes, ce qui donne les deux conditions $2 + K = -K$ et $K + L = L - 1$. Ces deux équations se réduisent à l'unique condition commune $K = -1$, la constante L pouvant donc prendre la valeur qu'on veut. Les fonctions solutions du probème sont donc toutes les fonctions f définies par $f(x) = x\ln^2(x) - x\ln(x) + Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. En effet, elles ont toutes une limite nulle en 0 par des arguments de croissance comparée tout à fait classiques.

2. (a) Si les bornes étaient inversées, F_n serait la primitive de f_n s'annulant en 1. Avec les bornes dans ce sens, il s'agit donc de l'opposé de cette primitive.

   (b) Par définition, $F_n(x) = \displaystyle\int_x^1 t^n \ln(t)\ dt$. On effectue une IPP en posant $u(t) = \ln(t)$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, et $v'(t) = t^n$ qu'on intègre bêtement en $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors $F_n(x) = \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_x^1 - \displaystyle\int_x^1 \dfrac{t^n}{n+1}\ dt = -\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \left[\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_x^1 = -\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n+1}f_{n+1}(x)$.

   (c) La question cadeau du jour, il suffit de poser $x = 0$ dans la formule précédente (techniquement $f_{n+1}(0)$ est une limite, mais comme le prolongement par continuité a déjà été fait précédemment il n'y a plus rien à justifier).

3. On reconnait dans la somme apparaissant dans le membre de droite une somme géométrique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k+1} = x\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = x \times \dfrac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \dfrac{x-(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{1+x^2}$. Il n'y a qu'à séparer le numérateur et faire passer le deuxième terme de l'autre côté pour obtenir exactement l'égalité de l'énoncé.

4. On multiplie l'égalité par $\ln(x)$, puis on intègre entre 0 et 1 : $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x\ln(x)}{1+x^2}\ dx$ $= \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k+1}\ln(x)\ dx + (-1)^{2n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}\ln(x)}{1+x^2}\ dx = u_1 - u_3 + u_5 - \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{f_{2n+3}}{1+x^2}\ dx$.

5. (a) La fonction f_{2n+3} étant négative sur l'intervalle $[0,1]$ (toutes les fonctions f_k le sont) à cause du $\ln(x)$, la négativité de l'intégrale est triviale. De l'autre côté, il suffit de constater que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, donc $\dfrac{x^{2n+3}\ln(x)}{1+x^2} \geqslant x^{2n+3}\ln(x)$, et l'inégalité de gauche en découle en intégrant sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) Le calcul explicite de u_n effectué dans la question 2 montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question précédente prouve donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}\ dx = 0$. On reprend enfin l'égalité de la question 4 pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx$.

   (c) La question 4 peut s'écrire sous la forme $\left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx - S_n\right| = \left|\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f_{2n+3}}{1+x^2}\ dx\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ en reprenant l'encadrement de la question 5.a. Il ne reste plus donc qu'à trouver un entier n_0 pour lequel $\dfrac{1}{(n_0+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{100}$, condition suffisante pour assurer la majoration demandée. En pratique, $n_0 = 9$ convient.

6. (a) La fonction G est une primitive de g, qui est négative sur $[0,1]$ et positive ensuite. La fonction G est donc décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet pour minimum $G(1) = 0$.

   (b) Encore une question triviale : $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant 2t^2$ quand $t \geqslant 1$, il suffit de passer à l'inverse en retournant les inégalités.

   (c) On multiplie l'encadrement précédent par $t\ln(t)$ (qui est positif quand t varie entre 1 et x) pour obtenir $\dfrac{\ln(t)}{2t} \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$, et on peut ensuite intégrer entre 1 et x, ce qui donne exactement l'encadrement souhaité.

(d) Il nous suffit de calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2(x)$. On en déduit donc que, $\forall x > 1$, $\dfrac{1}{4}\ln^2(x) \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$, ce qui suffit bien sûr à affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. L'inégalité de droite est d'ailleurs superflue, mais elle permet de donner une allure plus rigoureuse à la courbe de la question suivante.

(e) Pas grand chose de passionnant à signaler, on a ajouté en pointillés rouges les courbes de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln^2(x)$ qui encadrent celle de G sur $[1, +\infty[$: