Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

1er décembre 2022

Exercice 1

On note pour tout cet exercice $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, et montrer que ses solutions sont j et j^2.
2. Préciser le module et un argument du nombre j, et donner sa forme exponentielle.
3. Montrer que $j^3 = 1$ et $j^2 = -1 - j$.
4. En notant P, Q et R les points d'affixes respectives 1, j et j^2 dans le plan complexe, que peut-on dire du triangle PQR ?
5. On suppose que trois nombres complexes a, b et c vérifient $a + jb + j^2c = 0$. On note A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c.
   (a) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que $a - c = j(c - b)$.
   (b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en C.
   (c) Par un raisonnement similaire, montrer que le triangle ABC est en fait équilatéral.

Exercice 2

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant (dans lequel y et z sont deux fonctions inconnues) : $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & -2y(t) - z(t) + \cos(t) \\ z'(t) & = & y(t) - 2z(t) + \sin(t) \end{array}\right.$. On propose pour cela deux méthodes differentes, les deux questions sont donc indépendantes (et il est bien sûr interdit d'utiliser les résultats obtenus dans la question 1 pour traiter la question 2).

1. On note $w(t) = y(t) + iz(t)$.
   (a) Montrer que w est solution de l'équation différentielle $w' = (-2 + i)w + e^{it}$.
   (b) Résoudre l'équation précédente (les méthodes sont identiques à celles vues pour le même type d'équations dans $\mathbb{R}$, mais on cherche bien sûr ici des solutions complexes).
   (c) En déduire les fonctions y et z solutions du système initial.
2. (a) Expliquer pourquoi les fonctions y et z sont nécessairement deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction y est solution de l'équation du second ordre $y'' + 4y' + 5y = 2\cos(t) - 2\sin(t)$.
   (c) Résoudre l'équation précédente (on ne veut cette fois que des solutions réelles).
   (d) Conclure.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation du second ordre (E) : $x^2y'' - xy' + y = 2x$. On cherche dans les deux premières questions à résoudre cette équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par deux méthodes différentes, ces deux questions sont donc à nouveau à traiter indépendamment l'une de l'autre (en particulier, les fonctions notées z dans ces deux questions n'ont rien à voir l'une avec l'autre).

1. Première méthode : changement d'inconnue.
   (a) Montrer que l'équation homogène associée à (E) admet une solution de la forme $y(x) = x^k$, pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

(b) On pose $z(x) = x^k y(x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation (E_1) : $xz'' + z' = \dfrac{2}{x}$.

(c) Résoudre l'équation (E_1) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(d) Conclure.

2. Deuxième méthode : changement de variable.
   (a) En posant cette fois-ci $y(x) = z(\ln(x))$ (autrement dit en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$), montrer que y est solution de (E) si la fonction z est solution de l'équation (E_2) : $z'' - 2z' + z = 2e^t$.
   (b) Résoudre l'équation (E_2) et conclure.
3. Peut-on prolonger certaines des solutions de l'équation (E) en fonctions continues sur $[0, +\infty[$? Dérivables sur $[0, +\infty[$?
4. On cherche dans cette question à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et vérifiant sur cet intervalle l'équation $f'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1$.
   (a) Justifier qu'une telle fonction f est en fait deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E).
   (c) Conclure rigoureusement.

Exercice 4

On définit dans cet exercice les fonctions g et f_n (pour tout entier naturel n) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2+1}$ et $f_n(x) = x^n \ln(x)$. Toutes ces fonctions seront prolongées en 0 en posant $g(0) = f_n(0) = 0$.

1. Justifier que les fonctions ainsi prolongées sont toutes continues sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_x^1 f_n(t)\, dt$ et $u_n = F_n(0)$.
   (a) Que représente la fonction F_n pour f_n ?
   (b) À l'aide d'une IPP, exprimer $F_n(x)$ à l'aide de f_{n+1} et d'un polynôme (sans faire intervenir de symbole $\int$).
   (c) En déduire que $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx = u_1 - u_3 + u_5 - \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}\, dx$.
5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{2k+1}$.
   (a) Montrer que $u_{2n+3} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}\, dx \leqslant 0$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 g(x)\, dx$.
   (c) Déterminer un entier naturel n_0 pour lequel on peut affirmer que $\left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx - S_{n_0}\right| \leqslant 10^{-2}$.
6. On note enfin $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\, dt$ (fonction définie sur $[0, +\infty[$).
   (a) Préciser les variations de la fonction G.
   (b) Montrer que, si t est un réel supérieur ou égal à 1, alors $\dfrac{1}{2t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
   (c) En déduire que, si $x > 1$, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.
   (d) Calculer à l'aide de l'encadrement précédent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$.
   (e) Tracer une allure crédible de la courbe représentative de la fonction G (on pourra utiliser $G(0) \simeq 0.2$).