Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 novembre 2022

Exercice 1

1. On constate que $-\dfrac{77\pi}{4} = -20\pi + \dfrac{3\pi}{4}$, donc $\cos\left(-\dfrac{77\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{77\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\tan\left(-\dfrac{77\pi}{4}\right) = -1$.
2. Si on n'a pas oublié ses formules de duplication, on peut écrire l'équation sous la forme $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$, ce qui implique $2x \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, ou $2x \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$.
3. La première est immédiate avec le binôme de Newton : $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i} = (2+1)^n = 3^n$. Pour la deuxième, on peut séparer la somme en produit de deux sommes indépendantes qu'on sait calculer : $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^n \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^n(2^{n+1}-1) = 2^{2n+1} - 2^n$. La troisième est la plus compliquée du lot, car on ne peut pas la calculer de la façon qu'on utilise d'habitude, en mettant l'indice i dans la somme intérieure (on n'a aucune formule pour une somme de coefficients binômiaux qui ne parcourt pas une ligne entière du triangle de Pascal). On va donc passer par l'autre sens : $U_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=i}^{n} 2^j = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (2^{n+1} - 2^i) = 2^{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 2^{2n+1} - 3^n$. Enfin, la dernière somme peut pour le coup se calculer dans le sens classique : $V_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} 2^j = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times (2^{i+1}-1) = 2 \times 3^n - 2^n$. Si on additionne les deux sommes U_n et V_n, on va retrouver tous les termes de la somme T_n, mais en ayant compté deux fois ceux où $i = j$, qui correspondent exactement aux termes de la somme S_n. On devrait donc avoir $U_n + V_n = T_n + S_n$, ce qui est bien le cas.
4. On a bien sûr le droit de ne pas faire un pivot de Gauss débile mais de simplement commencer par éliminer les y de la dernière équation via l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir le système équivalent $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & z & = & 15 \\ 3x & & & - & 4z & = & 3 \\ x & & & + & 3z & = & 14 \end{array}\right.$. On enchaîne avec $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$ et on a un système triangulaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & z & = & 15 \\ 3x & & & - & 4z & = & 3 \\ & & & & 13z & = & 39 \end{array}\right.$. Il ne reste plus qu'à remonter le système : $z = \dfrac{39}{13} = 3$ puis $x = 1 + \dfrac{4}{3}z = 5$ et enfin $y = \dfrac{15}{2} - x - \dfrac{1}{2}z = 1$. Le système est donc de Cramer, et $\mathcal{S} = \{5, 1, 3\}$.
5. Pour les valeurs de x pour lesquelles elle a un sens (donc si $\cos(x) \neq 0$), l'équation est équivalente en multipliant tout par $\cos(x)$ à $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$, ou encore $2 - 2\cos^2(x) -$

$3\cos(x) = 0$. On pose $X = \cos(x)$ et on change les signes pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 + 3X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$ et pour racines $X_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$, valeur clairement incompatible avec notre changement de variables, et $X_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$. La seule possibilité restante est donc $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, soit $x \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

6. On calcule donc brillamment $u_2 = \dfrac{2}{1} \times u_1 = 6$, puis $u_3 = \dfrac{2}{2} \times (u_1 + u_2) = 3 + 6 = 9$ et enfin $u_4 = \dfrac{2}{3} \times (3 + 6 + 9) = 12$. On peut raisonnablement penser que $u_n = 3n$, ce qu'on va donc prouver par récurrence **forte** (on a besoin de connaître toutes les valeurs précédentes de la suite pour pouvoir calculer u_{n+1}). Pas besoin d'initialiser, ça a déjà largement été fait. Supposons que $\forall k \leqslant n$, $u_k = 3k$, alors $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k = \dfrac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{6}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence et démontre donc la formule souhaitée.

Exercice 2

1. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème est l'éventuelle annulation du dénominateur, qui se produira quand $x = 0$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, et f est de plus impaire en tant que composée de deux fonctions impaires.

2. Commençons par poser $g(x) = \dfrac{1}{\text{sh}(x)}$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant $g'(x) = -\dfrac{\text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)}$.

   La fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{1 + g(x)^2} = \dfrac{-\frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)}}{1 + \frac{1}{\text{sh}^2(x)}} = -\dfrac{\text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x) + 1}$.

   La formule $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ permet de simplifier ce quotient en $f'(x) = -\dfrac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = -\dfrac{1}{\text{ch}(x)}$. On en déduit facilement que f est strictement décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.

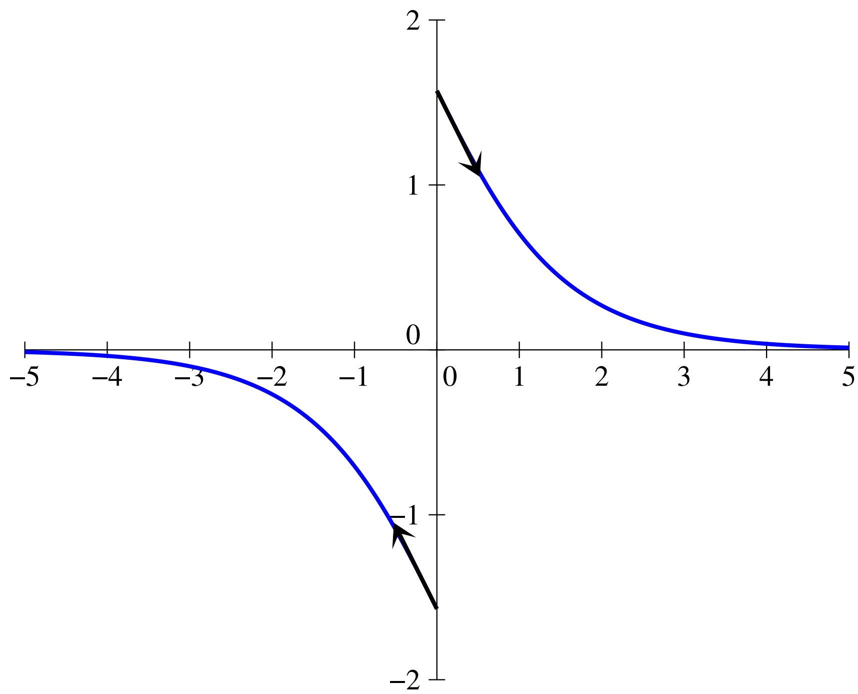
3. Comme $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\text{sh}(x)} = 0$ et $\arctan(0) = 0$, $\displaystyle f_{x\to\pm\infty}(x) = 0$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\text{sh}(x)} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. De même (ou en exploitant l'imparité de f), $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

4. Comme la fonction arctan est à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on peut mettre des tangentes des deux côtés de l'équation et conserver une équivalence : $\dfrac{1}{\text{sh}(x)} = 1$ si $\text{sh}(x) = 1$, donc $e^x - e^{-x} = 2$, ou encore en mutlipliant tout par e^x, $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. On pose $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et pour racines $X_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $X_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$. La seule solution à l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ est donc $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

   Même méthode pour l'autre équation, on veut $\dfrac{1}{\text{sh}(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc $e^x - e^{-x} = 2\sqrt{3}$, soit après changement de variable $X^2 - 2\sqrt{3}X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12 + 4 = 16$ et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{2\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3}-2 < 0$ et $X_2 = \sqrt{3}+2 > 0$. Là encore, on a une solution unique : $x = \ln(2+\sqrt{3})$.

5. Les plus courageux auront remarqué que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$ pour améliorer l'allure de courbe obtenue :



Exercice 3

1. Effectuons donc une récurrence, en démarrant comme on nous le suggère à $n = 1$. Dans ce cas, la somme est égale à $1 \times 2 = 2$ (elle ne contient qu'un seul terme), et le membre de droite à $\dfrac{1\times 2\times 3}{3} = 2$, la propriété est donc vérifiée. Supposons-là désormais vraie au rang n, et calculons alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+1+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$. La propriété est donc vérifiée pour tout entier naturel non nul.

2. C'est du cours : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Or, en développant simplement et en séparant les sommes, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Pour $p = 0$, on obtient $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et pour $p = 1$, on vient de démontrer que la somme est égale à $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, on peut donc imaginer que $S_n = \dfrac{n(n+1)\dots(n+p+1)}{p+2}$ (qu'on peut écrire en faisant intervenir un coefficient binômial, mais la démonstration sera plus simple sous cette forme basique). Démontrons-le par récurrence (sur l'entier n bien entendu, p étant fixé une bonne fois pour toutes). C'est en fait quasiment la même chose qu'à la

première question : pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)\dots(k+p) = (p+1)!$, et $\dfrac{1\times 2\times\dots(p+2)}{p+2} = \dfrac{(p+2)!}{p+2} = (p+1)!$. Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, et calculons $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)\dots(n+p+1) = \dfrac{n(n+1)\dots(n+p+1)}{p+2} + (n+1)(n+2)\dots(n+p+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)(n+p+2)}{p+2}$, ce qui prouve l'hérédité de la récurrence.

4. On peut en effet écrire $\dfrac{k(k+1)\dots(k+p)}{(p+1)!} = \dfrac{(k+p)!}{(k-1)!(p+1)!} = \dbinom{p+k}{k-1} = \dbinom{p+k}{p+1}$. On en déduit que $\dfrac{S_n}{(p+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\dbinom{p+k}{k-1} = 1+\sum_{k=2}^{n}\dbinom{p+k}{k-1}$, qu'on peut simplifier à coups d'applications successives de la relation de Pascal : $1+\dbinom{p+2}{1}+\dbinom{p+3}{2}+\dbinom{p+4}{3}+\dots+\dbinom{p+n}{n-1} = \dbinom{p+3}{1}+\dbinom{p+3}{2}+\dbinom{p+4}{3}+\dots+\dbinom{p+n}{n-1} = \dbinom{p+4}{2}+\dbinom{p+4}{3}+\dots+\dbinom{p+n}{n-1} = \dbinom{p+5}{3}+\dots+\dbinom{p+n}{n-1} = \dots = \dbinom{p+n+1}{n-1}$ (oui, il faudrait refaire une récurrence pour que ce soit parfaitement rigoureux). On en déduit que $S_n = \dfrac{(p+1)!(p+n+1)!}{(n-1)!(p+2)!} = \dfrac{1}{p+2}\times\dfrac{(p+n+1)!}{(n-1)!}$, ce qui est bien la formule démontrée plus haut !

5. On développe joyeusement : $k(k+1)(k+2)(k+3) = (k^2+k)(k^2+5k+6) = k^4+6k^3+11k^2+6k$. Comme on sait que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$, on peut en déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) - 6k^3 - 11k^2 - 6k$, soit en exploitant les formules vues en cours $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - \dfrac{3n^2(n+1)^2}{2} - \dfrac{11n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n(n+1) = \dfrac{n(n+1)[6(n+2)(n+3)(n+4) - 45n(n+1) - 55(2n+1) - 90]}{30}$
$= \dfrac{n(n+1)(6n^3+54n^2+156n+144-45n^2-45n-110n-55-90)}{30}$
$= \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Et là, bien sûr, on se rend compte immédiatement (ou pas...) que $(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^2+9n+n-1$, et donc qu'on peut encore factoriser un peu : $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.