Devoir Surveillé n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

10 novembre 2022

Exercice 1

Les quelques calculs constituant ce premier exercice sont indépendants les uns des autres.

1. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $-\dfrac{77\pi}{4}$.
2. Résoudre l'équation $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$.
3. Calculer les sommes suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i$, $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} 2^j$, $U_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{i} 2^j$ et enfin $V_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{i} 2^j$. Quel lien existe-t-il entre ces quatre sommes ?
4. Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & z & = & 15 \\ 3x & & & - & 4z & = & 3 \\ -x & - & 2y & + & 2z & = & -1 \end{array} \right.$
5. Résoudre l'équation $2\sin(x)\tan(x) = 3$.
6. On définit une suite (u_n) de la façon suivante : $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Calculer u_2, u_3 et u_4, conjecturer la valeur de u_n, puis prouver cette conjecture.

Exercice 2

On pose dans cet exercice $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. La fonction f a-t-elle une parité remarquable ?
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Quelles sont les limites de f aux bornes de son domaine de définition ? Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
4. Résoudre les équations $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ et $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$.
5. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 3

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. Déduire de cette valeur et de la formule de la question précédente une nouvelle façon de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Conjecturer une formule générale pour $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+p)$, où p est un entier naturel fixé. Démontrer cette formule par récurrence.
4. Écrire $\dfrac{S_n}{(p+1)!}$ sous forme d'une somme de n coefficients binomiaux, et en déduire une autre façon de calculer S_n.
5. Développer $k(k+1)(k+2)(k+3)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ (sous forme factorisée de préférence).