Devoir Surveillé n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 octobre 2022

Exercice 1

1. On peut écrire l'équation sous la forme $4 \times 2^{x+2} - 2^{x+2} = 9 \times 3^x - 3^x$, soit $3 \times 2^{x+2} = 8 \times 3^x$, ou encore $2^{x-1} = 3^{x-1}$. On peut composer par la fonction ln des deux côtés : $(x-1)\ln(2) = (x-1)\ln(3)$, donc $(x-1)(\ln(2) - \ln(3)) = 0$. Comme $\ln(2) - \ln(3) \neq 0$, la seule possibilité est d'avoir $x - 1 = 0$, donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
2. On applique la méthode classique du « tableau de signes » :

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$\lvert x-2 \rvert$	$2-x$	$2-x$	$2-x$ 0	$x-2$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$ 0	x	x
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$ 0	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-2 \rvert + \lvert x \rvert + \lvert x+2 \rvert$	$-3x$	$4-x$	$4+x$	$3x$

On résout assez facilement sur chaque intervalle $-3x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{4}{3}$, ce qui ne se produit jamais sur $]-\infty, -2]$, $4 - x \leqslant 4$ donne évidemment $x \geqslant 0$, qui n'est vérifié que pour $x = 0$ sur l'intervalle $[-2, 0]$. De même, l'inéquation n'est vraie que pour $x = 0$ sur $[0, 2]$ et ne peut jamais être vérifiée sur $[2, +\infty[$ (on obtient des conditions symétriques de celles des deux intervalles précédents), donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

3. On remplace tout par des exponentielles, en multipliant par 2 pour éviter les fractions : $7e^x - 7e^{-x} + 2e^x + 2e^{-x} = 18$, donc après multiplication par e^x, $9e^{2x} - 9e^x - 5 = 0$. On effectue le changement de variable $X = e^x$ pour obtenir l'équation équivalente $9X^2 - 18X - 5 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 324 + 180 = 504 = 36 \times 14$ et admet donc pour solutions $X_1 = \dfrac{18 - 6\sqrt{14}}{18} = 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{3}$ et $X_2 = \dfrac{9 + 6\sqrt{14}}{18} = 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{3}$. La première solution est à éliminer vu le changement de variables effectués, on conserve donc seulement $x_2 = \ln\left(1 + \dfrac{\sqrt{14}}{3}\right)$. J'avoue volontiers qu'une petite inversion entre le ch et le sh dans l'énoncé a rendu la solution de l'équation nettement plus moche qu'initialement prévu.
4. On met tout sous forme exponentielle avant de réfléchir à quoi que ce soit d'autre (de toute façon, elle n'a de sens que si $x > 0$) : $e^{\ln^2(x)} = x = e^{\ln(x)}$ si et seulement si $\ln^2(x) = \ln(x)$, donc si $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = 0$, ce qui donne $\mathcal{S} = \{1, e\}$.
5. On effectue bien sûr le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du troisième degré $4X^3 - 4X^2 - 11X + 6 = 0$, qui a le bon goût d'avoir pour racine évidente $X = 2$ puisque $4 \times 8 - 4 \times 4 - 11 \times 2 + 6 = 32 - 16 - 22 + 6 = 0$. On peut donc factoriser notre membre de gauche sous la forme $4X^3 - 4X^2 - 11X + 6 = (X-2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$. Une petite identification donne les équations $a = 4$, puis $b - 2a = -4$ qui implique $b = 4$, et $c - 2b = -11$ qui donne $c = -3$ (ce qui satisfait également la dernière équation $-2c = 6$). Reste à résoudre l'équation $4X^2 + 4X - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 + 48 = 64$ et admet pour racines $X_1 = \dfrac{-4-8}{8} = -\dfrac{3}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-4+8}{8} = \dfrac{1}{2}$. On peut maintenant conclure (sans oublier de remonter le changement de variable, une des valeurs de X étant impossible) : $\mathcal{S} = \{-\ln(2), \ln(2)\}$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie si $x \neq -1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, ce qui est équivalent à avoir $(x-1)(x+1) \geqslant 0$, donc $x^2 \geqslant 1$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$. La fonction f n'est ni paire ni impaire : par exemple $f(2) = 2 \times \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $f(-2) = (-2) \times \sqrt{3}$, qui n'est ni égal ni opposé à $f(2)$.

2. La fonction f est dérivable sur tout son ensemble de définition, sauf probablement en 1. Pour calculer un peu plus facilement f', on peut commencer par poser $u(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, et calculer $u'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, avant d'en déduire $f'(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + x \times \dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \dfrac{x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x^2-1+x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. Cette dérivée est du signe de $x^2 + x - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. La valeur x_2 ne nous intéresse guère puisqu'elle est comprise entre -1 et 1 (car $-1+\sqrt{5} \in]1, 2[$). Par contre, $x_1 < -1$ et correspondra donc à l'abscisse d'un maximum local pour la fonction f. On peut essayer de calculer $\dfrac{x_1-1}{x_1+1} = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{(-3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{1-5} = 2+\sqrt{5}$, pour en déduire que $f(x_1) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (comme prévu, c'est pas très beau). Le calcul des limites de f ne pose guère de problèmes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$ (quotient des termes de plus haut degré, ou exploitation de la simplification de $u(x)$ donnée plus haut), donc on déduit immédiatement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Pas de limite à calculer en 1, f y est définie et $f(1) = 0$. Par contre, $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. On résume tout ça dans un joli tableau :

x	$-\infty$		x_1		-1	1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Ce n'est pas compliqué quand on a fait l'effort de mettre f' sous une forme exploitable : le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0 (en restant positif, puisque tout y est positif !), donc $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$. La courbe aura donc une tangente verticale à cet endroit.

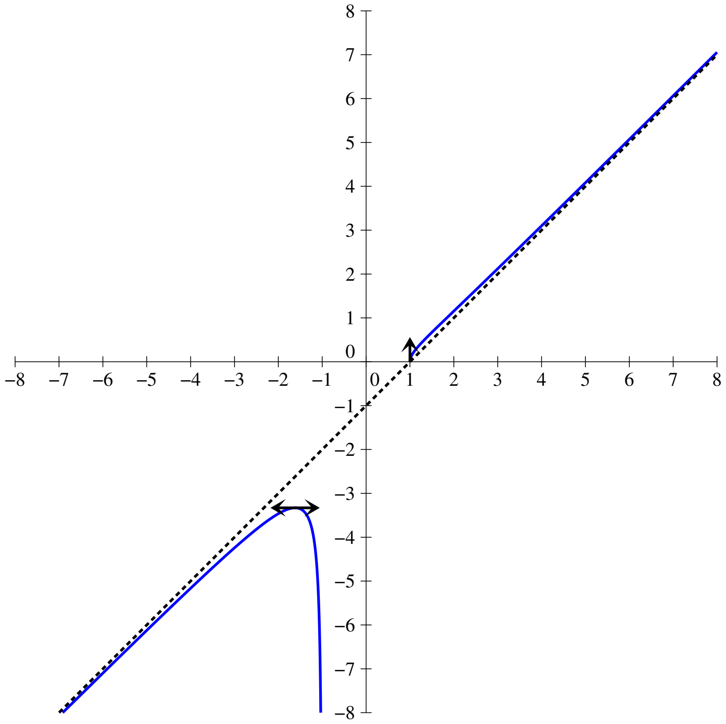
4. Il suffit bien sûr de calculer la limite de $f(x)-x$ (on ajoutera 1 à la fin !), ce qu'on peut faire avec une exploitation assez brutale de quantité conjuguée : $f(x) - x = x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1\right) = \dfrac{x \times (\frac{x-1}{x+1} - 1)}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1}$.

   Le dénominateur de cette fraction a pour limite 2 en $\pm\infty$ (plus de forme indéterminée maintenant qu'on a une somme), alors que le numérateur peut se simplifier en $\dfrac{-2x}{x+1}$, qui va quant à lui tendre vers -2. Finalement, on obtient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -1$, et donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x + 1 = 0$, ce qui prouve exactement que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. On calcule donc $f(2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (on l'avait déjà fait à la première question), et $f'(2) = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$ pour en déduire une équation de la tangente : $y = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}(x-2) + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}x - \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Passionnant.

6. On commence par calculer l'abscisse du maximum : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq \dfrac{-3.2}{2} \simeq -1.6$. Ensuite, on aurait besoin d'une valeur approchée de $\sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{4.2} \simeq 2.1$ (c'est légèrement plus grand que 2) pour calculer $f(x_1) \simeq -1.6 \times 2.1 \simeq -3.4$. C'est bien suffisant pour placer le point à la bonne hauteur,

on trace également l'asymptote et la tangente verticale calculées plus haut, on se dispensera par contre d'essayer de tracer la tangente en 2 qui a une équation trop moche (et en plus ça n'apporte rien au tracé !).



Exercice 3

1. Le seul problème qu'on puisse avoir est l'annulation du dénominateur, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
2. Calculons donc : $f(2) = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $f(-1) = \left|\frac{-2}{-1}\right| = 2$ et $f(1-\sqrt{3}) = \left|\frac{-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})^2 - 2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{|2-2\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(3-1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.
3. On vet donc résoudre sur $\mathcal{D}_f$ l'inéquation $|x-1| \geqslant 2|x^2-2|$. On va effectuer un petit tableau :

x	$-\infty$ $\quad$ $-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$ $\quad 0$	$x-1$	$x-1$
$2\lvert x^2-2\rvert$	$2x^2-4$ $\quad 0$	$4-2x^2$	$4-2x^2$ $\quad 0$	$2x^2-4$
$\lvert x-1\rvert - 2\lvert x^2-2\rvert$	$-2x^2-x+5$	$2x^2-x-3$	$2x^2+x-5$	$-2x^2+x+3$

On peut maintenant résoudre l'inéquation sur chaque intervalle :

- sur $]-\infty, -\sqrt{2}[$, on doit avoir $-2x^2-x+5 \geqslant 0$, ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1+40 = 41$ et pour racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{-4} = \frac{\sqrt{41}-1}{4}$, qui est largement positive, et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{41}}{4}$, qui est nettement inférieure à $-\sqrt{2}$. On conserve donc comme solutions les éléments de l'intervalle $I_1 = \left[\frac{-1-\sqrt{41}}{4}, -\sqrt{2}\right[$.
- sur $]-\sqrt{2}, 1]$, le trinôme $2x^2-x-3$ a pour discriminant $\Delta = 1+24 = 25$ et pour racines $x_3 = \frac{1-5}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$. Cette fois-ci, on souhaite être à l'extérieur des racines, on conserve donc $I_2 =]-\sqrt{2}, -1]$.

- le trinôme à étudier est le même sur le troisième intervalle que sur le premier (avec un signe opposé), comme $x_1 < \sqrt{2}$ (il suffit pour le constater de partir de $\sqrt{41} \in [6, 7]$), on va conserver $I_3 = \left[\frac{\sqrt{41} - 1}{4}, \sqrt{2}\right[$.
- à nouveau, on a le même trinôme sur le dernier intervalle que sur le deuxième, on garde $I_4 = \left]\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Bien sûr, on conclut : $\mathcal{S} = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ (je n'ai pas envie de recopier les intervalles).

4. Par quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Les autres limites sont encore plus faciles à calculer : comme le numérateur de notre fraction ne s'annule pas en $\pm\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{2}} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \pm\infty$ (ça dépend si on est à gauche ou à droite à chaque fois), et la valeur absolue va transformer toutes ces limites en limites égales à $+\infty$.

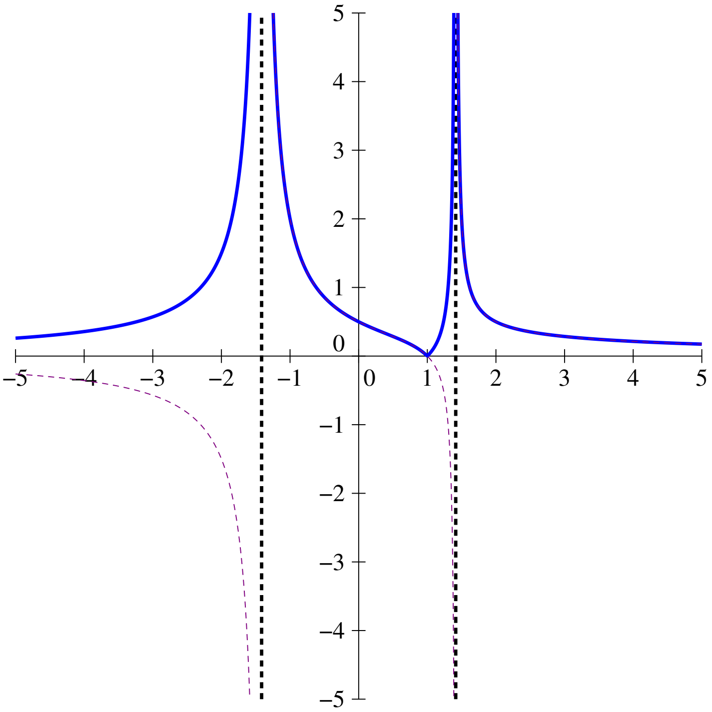
5. On pose $h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2}$. Commençons par faire le tableau de signes de la fonction h :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Étudions maintenant les variations de h, qui est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, de dérivée $h'(x) = \frac{x^2 - 2 - 2x(x - 1)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x^2 - 2)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur $-x^2 + 2x - 2$, qui est lui-même toujours négatif puisque son discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. La fonction h est donc strictement décroissante sur chacun de ses intervalles de définition, et on en déduit aisément les variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
h	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

6. On n'a en fait pas grand chose de très intéressant à tracer (en bleu la courbe de f, en violet pointillés celle de h) :



Exercice 4

1. La relation $\mathcal{R}$ est bel et bien :

   - réflexive puisque, $\forall B \in \mathcal{P}(E)$, $B \cap A = B \cap A$, donc $B\mathcal{R}B$.
   - symétrique puisque les conditions $B \cap A = C \cap A$ et $C \cap A = B \cap A$ sont clairement identiques, donc $B\mathcal{R}C \Leftrightarrow C\mathcal{R}B$.
   - transitive car si on suppose que $B \cap A = C \cap A$ et que $C \cap A = D \cap A$, on en déduira certainement que $B \cap A = D \cap A$, ce qui prouve que les deux hypothèses $B\mathcal{R}C$ et $C\mathcal{R}D$ impliquent $B\mathcal{R}D$.

2. (a) Les ensembles B_1 et B_5 sont en relation (leur intersection avec A est égale à A tout entier), ainsi que les ensembles B_3 et B_4 (leur intersection avec A est vide). L'ensemble B_2 n'est en relation avec aucun des quatre autres.

   (b) Un sous-ensemble est en relation avec $\emptyset$ si son intersection avec A est vide, autrement dit s'il ne contient ni 1, ni 2, ce qui donne $C_\emptyset = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$. Un sous-ensemble est dans la classe de B_2 s'il contient l'élément 2 mais pas l'élément 1, ce qui donne $C_{B_2} = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, B_2\}$.

   (c) La classe d'équivalence est uniquement déterminée par l'intersection avec A, qui peut être égale à n'importe quel sous-ensemble de A. Il y aura donc quatre classes d'équivalence : celle de $\emptyset$, celle contenant l'ensemble $\{1\}$, celle contenant l'ensemble $\{2\}$ (qui est celle de B_2 décrite ci-dessus) et celle contenant A. Dans chacune de ces classes, les ensembles ont une intersection avec A fixée mais peuvent contenir ou non chacun des éléments n'appartenant pas à A, ici les éléments 3 et 4, ce qui laisse quatre possibilités pour chaque classes. Il est cohérent d'avoir quatre classes contenant chacune quatre sous-ensemble puisqu'on a au total $2^4 = 16$ sous-ensembles dans E.

3. Un élément de la classe de $\emptyset$ ne contient aucun élément de A, mais peut contenir n'importe quel élément n'appartenant pas à A. Autrement dit, on aura simplement $C_\emptyset = \mathcal{P}(\overline{A})$. De même un élément de la classe d'équivalence de A contient A tout entier, et peut contenir ou non n'importe quel élément n'appartenant pas à A, donc $C_A = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset B\}$. De façon exactement similaire, $C_{\overline{A}} = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid \overline{A} \subset B\}$. Enfin, E a la même intersection avec A que A lui-même, donc $C_E = C_A$.

4. Soit C un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}(E)$, alors, en notant $B = A \cap C$, la classe d'équivalence de C contient l'ensemble B, et celui-ci est inclus dans A, ce qui prouve que toute classe d'équivalence contient un sous-ensemble inclus dans A. Mais si elle en contenait deux, notés B et B', on devrait avoir $B \cap A = B' \cap A$, donc $B = B'$ puisque les deux ensembles sont par hypothèse inclus dans A. Ceci prouve qu'il ne peut y avoir qu'un seul sous-ensemble de A dans chaque classe d'équivalence.

5. D'après la question précédente, il y a autant de classes d'équivalence que de sous-ensembles de A, donc 2^n, où n est le nombre d'éléments de A. Si E est lui-même fini, une classe d'équivalence contient des sous-ensembles ayant la même intersection avec A, mais pouvant contenir ou non chacun des sous-ensembles de $\overline{A}$ (cf question 2), il y aura donc 2^p sous-ensembles dans chaque classe, avec p le nombre d'éléments de $\overline{A}$.

6. (a) Encore une fois, on a trois choses à vérifier :

   - réfléxivité : pour tout sous-ensemble B, on a $B\Delta B = \emptyset$, qui est certainement toujours inclus dans A, quel que soit le choix de A.
   - symétrie : c'est évident puisque l'opération de différence symétrique est commutative : $B\Delta C = C\Delta B$.
   - transitivité : c'est nettement moins évident. Supposons donc que $B\Delta C \subset A$ et $C\Delta D \subset A$, et soit $x \in B\Delta D$. En prenant la définition $B\Delta D = (B\backslash D) \cup (D\backslash B)$, on peut par exemple supposer que $x \in B$ mais $x \notin D$ (l'autre cas étant parfaitement symétrique). On peut maintenant distinguer deux cas : si $x \in C$, alors $x \in C \cup D$, mais $x \notin D$, ce qui prouve que $x \in C\Delta D \subset A$, donc $x \in A$. De même, si $x \notin C$, on a cette fois-ci $x \in B \cup C$ mais $x \notin C \cap D$, ce qui suffit à nouveau à conclure que $x \in B\Delta C$, donc $x \in A$. On a donc prouvé que $B\Delta D \subset A$, ce qui prouve exactement la transitivité de la relation $\mathcal{S}$.

   (b) Commençons par exemple par déterminer la classe d'équivalence de $\emptyset$. Un sous-ensemble B est dans cette classe si $B\Delta\emptyset \subset A$, donc si $B \subset A$. Autrement dit, $C_\emptyset = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Intéressons-nous ensuite à la classe d'équivalence de E tout entier. Comme $B\Delta E = \overline{B}$, elle est constituée de tous les ensembles dont le complémentaire est inclus dans A, autrement dit ceux qui contiennent $\overline{A}$: $C_E = \{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, E\}$. On peut alors deviner que les huit sous-ensembles restants vont se répartir en deux classes d'équivalence, selon qu'ils contiennent ou non l'élément 3 ou l'élément 4. En effet, $\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ sont bien dans la même classe (l'intersection de deux de ces ensembles contient toujours l'élément 3, donc leur différence symétrique ne peut contenir au maximum que les éléments 1 et 2), et $\{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$ est la dernière classe d'équivalence.

   (c) Il y a un problème dans l'énoncé de cette dernière question puisque le résultat est manifestement faux, par exemple pour $B = A$ (dans ce cas, tous les sous-ensembles C vérifient $A \cap \overline{A} \subset C$ et pourtant tout le monde n'est pas dans la même classe d'équivalence). En fait, il faudrait écrire que les sous-ensembles C sont tous les sous-ensembles de la forme $(B \cap \overline{A}) \cup D$, avec $D \subset A$ (et non pas D quelconque comme l'énoncé le prétendait). Dans ce cas ça marche car on aura toujours $B \cap \overline{A} = C \cap \overline{A}$, ce qui est exactement la condition nécessaire et suffisante pour que $B\Delta C \subset A$.

Exercice 5

1. Puisque th est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \mathrm{ch}(x)$, une primite de th (sur $\mathbb{R}$ tout entier) est $F : x \mapsto \ln(ch(x))$. On peut donc calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{th}(x)\ dx = \ln(\mathrm{ch}(\ln(2))) - \ln(\mathrm{ch}(0)) = \ln\left(\frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln(5) - 2\ln(2)$.

2. On sait que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-1,1[$, le théorème de la bijection permet donc de donner le tableau de variations suivant pour sa réciproque :

x	-1	0	1
Argth	$+\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

3. $\forall x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

4. Parmi les nombreuses méthodes possibles, on peut calculer la réciproque en résolvant tout simplement l'équation $\mathrm{th}(x) = y$, qui peut s'écrire sous la forme $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$, ou encore (après

multiplication par e^x) $(1-y)e^{2x} = 1+y$, donc $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. Cette équation n'a de solutions que si $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc pour $y \in]-1,1[$, et dans ce cas $2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, ce qui donne bien la formule souhaitée. On peut alors poser $v(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et constater que $v'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$. On en déduit alors que $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

5. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\dfrac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}(x)^2} = \dfrac{\frac{2e^x-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} = \dfrac{2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2e^{2x}+2e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$.

6. (a) La fonction g est définie à condition d'avoir $0 \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1} < 1$ (le quotient doit être positif à cause de la racine carrée, et la racine carrée doit ensuite être strictement inférieure à 1 pour que la composition par Argth soit possible, donc le quotient lui-même doit être strictement inférieur à 1). Comme on sait que ch est minorée par 1, on a toujours $0 \leqslant \operatorname{ch}(x)-1 < \operatorname{ch}(x)+1$, donc la fonction g est toujours définie. Autrement dit, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

   (b) En reprenant les résultats précédentset en posant $y = \operatorname{ch}(x)$, $g(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1+y-1+2\sqrt{(y-1)(y+1)}}{(y+1)-(y-1)}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. En remplaçant maintenant y par $\operatorname{ch}(x)$, on trouve donc $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(x)+\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1})$. Or $\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = |\operatorname{sh}(x)| = \operatorname{sh}(|x|)$ (car la fonction sh est impaire). Comme la fonction ch, quant à elle, est paire, $\operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(|x|)$, et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(|x|)+\operatorname{sh}(|x|)) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{|x|}) = \dfrac{|x|}{2}$.