# Devoir Surveillé n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

8 octobre 2022

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
2. $|x-2| + |x| + |x+2| \leqslant 4$
3. $7\,\mathrm{sh}(x) + 2\,\mathrm{ch}(x) = 9$
4. $x^{\ln(x)} \leqslant x$
5. $4e^{3x} - 4e^{2x} - 11e^x + 6 = 0$

## Exercice 2

On pose dans cet exercice $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction $f$. La fonction $f$ a-t-elle une parité intéressante ?
2. Étudier les variations de la fonction $f$. On dressera un tableau de variations complet (on n'essaiera pas de simplifier l'expression assez laide obtenue pour l'extremum).
3. Préciser la valeur de $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$ ?
4. Étudier la limite quand $x$ tend vers $\pm\infty$ de $f(x) - x + 1$. En déduire la présence d'une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.
5. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 2.
6. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ (on précise que $\sqrt{5} \simeq 2.2$, on calculera sur la copie une valeur approchées des coordonnées de l'extremum de $f$).

## Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x^2-2}\right|$.

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Calculer $f(2)$, $f(-1)$, $f(1-\sqrt{3})$ (en simplifiant au maximum les expressions obtenues).
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.
4. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
5. Étudier les variations de la fonction $f$, puis dresser son tableau de variations complet.
6. Tracer une allure précise de la courbe représentative de $f$.

## Exercice 4

Dans tout cet exercice, $E$ désigne un ensemble quelconque, et $A$ un sous-ensemble fixé de l'ensemble $E$. On définit sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de $E$ une relation $\mathcal{R}$ de la façon suivante : deux sous-ensembles $B$ et $C$ de $E$ sont en relation si et seulement si $B \cap A = C \cap A$. On le notera comme d'habitude $B\mathcal{R}C$.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

2. Pour cette deuxième question (et **uniquement** pour cette deuxième question), on fixe $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$.
   (a) Parmi les sous-ensembles suivants, précisez lesquels sont en relation : $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{2,3,4\}$, $B_3 = \{3,4\}$, $B_4 = \emptyset$, $B_5 = \{1,2,4\}$.
   (b) Donner tous les sous-ensembles appartenant à la classe d'équivalence de $\emptyset$, puis tous ceux appartenant à la classe d'équivalence de $B_2$.
   (c) Combien de classes d'équivalentes distinctes aura-t-on au total ? Combien d'ensembles contient chacune de ces classes d'équivalence (on justifiera rapidement les réponses) ?
3. On revient désormais au cas général. Décrire le plus simplement possible les classes d'équivalence de $\emptyset$, de $A$, de $\overline{A}$ et de $E$.
4. Montrer qu'une classe d'équivalence contient toujours exactement un ensemble $B$ inclus dans $A$.
5. Si $A$ est un sous-ensemble fini de $E$, combien de classes d'équivalences la relation $\mathcal{R}$ contiendra-t-elle ? Si $E$ est également un ensemble fini, combien d'ensembles seront regroupés au sein de chaque classe d'équivalence ?
6. On rappelle pour cette dernière question que la différence symétrique de deux ensembles $B$ et $C$ est définie par $B\Delta C = (B \cup C)\backslash(B \cap C) = (B\backslash C) \cup (C\backslash B)$. On rappelle également que cette opération est commutative et associative, résultats qu'on pourra reprendre sans les démontrer. On définit maintenant une nouvelle relation $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $B\mathcal{S}C$ si et seulement si $B\Delta C \subset A$ (ici, $A$ est toujours un sous-ensemble fixé de $E$).
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer les classes d'équivalence pour cette relation dans le cas particulier où $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$.
   (c) Dans le cas général, prouver que la classe d'équivalence d'un sous-ensemble $B$ est constituée de tous les sous-ensembles $C$ vérifiant $B \cap \overline{A} \subset C$.

# Exercice 5

Le but de cet exercice est de démontrer quelques propriétés de la fonction th (dont on rappelle qu'elle est définie par $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$) et de sa réciproque.

1. Donner une primitive de la fonction th, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \text{th}(x)\ dx$.
2. On note Argth la réciproque de la fonction th. Sans chercher pour l'instant à calculer une expression explicite de cette réciproque, donner le tableau de variations de la fonction Argth.
3. Calculer la dérivée de Argth à l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque.
4. Montrer que $\text{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Retrouver à l'aide de cette expression la dérivée calculée à la question précédente.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(2x) = \dfrac{2\,\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}$.
6. On pose dans cette question $g(x) = \text{Argth}\left(\sqrt{\dfrac{\text{ch}(x)-1}{\text{ch}(x)+1}}\right)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $g$ (en justifiant soigneusement).
   (b) À l'aide de l'expression de Argth donnée en question 4, simplifier au maximum l'expression de $g(x)$ (on doit obtenir une expression de la forme $k \times h(x)$, où $k$ est un facteur constant simple, et $h$ une fonction usuelle classique que vous adorez tous).