Devoir Surveillé n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

17 septembre 2022

Exercice 1

1. Une possibilité parmi d'autres : $\forall k \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq k$ (ce qui revient exactement à nier la classique caractérisation des fonctions constantes $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k$.
2. En ne se préocuppant pas du domaine de définition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
3. C'est normalement facile : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x + 2\pi) = g(x)$ (pour les plus tordus d'entre vous, remplacer le $g(x + 2\pi)$ par $g(x - 2\pi)$ est tout aussi correct).
4. Il suffit d'ajouter une quantification pour définir la période : $\exists T \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$ (on peut faire appartenir T à $\mathbb{R}^{+*}$ si on veut se restreindre à la définition habituelle d'une période strictement positive).
5. $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.
8. On nie simplement la précédente : $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant g(x)$.
9. La fonction g est majorée par le réel M si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant M$. La fonction g n'est pas majorée si aucun réel n'est un majorant de g, donc si tout réel vérifie la négation de la définition précédente : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $g(x) > M$.

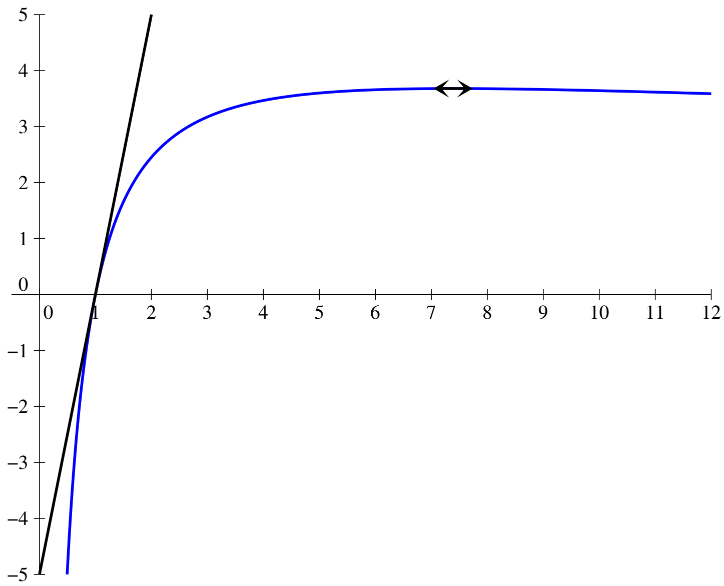
Exercice 2 (extrait d'un vieux sujet de bac)

1. Il n'y a pas de forme indéterminée en 0 : le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0 (par valeurs supérieures), donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, c'est un cas classique de croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (toute puissance l'emporte sur le ln en $+\infty$). Les deux axes sont donc asymptotes à la courbe (autrement dit, il y a une asymptote verticale et une horizontale).

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{5\sqrt{x}}{x} - \frac{5\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{10 - 5\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$. Son dénominateur étant toujours positif, la dérivée est du signe de $5(2-\ln(x))$, et s'annule en particulier lorsque $\ln(x) = 2$, donc $x = e^2$. En particulier, elle admet un maximum de valeur $f(e^2) = \dfrac{5 \times 2}{e} = \dfrac{10}{e}$ (sans avoir besoin de calculatrice, on doit pouvoir se rendre compte que cette valeur est aux alentours de $3,5$). Les calculs effectués permettent de dresser le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{e}$	$\searrow$	0

3. Calculons pour cela $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{10}{2} = 5$. La tangente (T) a donc pour équation $y = 5(x-1) = 5x - 5$.
4. La tangente est en noir, la courbe en bleu :



5. Puisqu'on nous le suggère si gentiment, on va donc effectuer une IPP en posant bien sûr $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qu'on peut intégrer en $u(x) = 2\sqrt{x}$, et $v(x) = 5\ln(x)$ qui donne $v'(x) = \dfrac{5}{x}$. On obtient alors $I = [10\sqrt{x}\ln(x)]_1^{e^2} - \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{10}{\sqrt{x}}\,dx = 20e - \left[20\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 20e - 20e + 20 = 20$ (comme la note que vous aurez tous à ce DS complètement trivial).
6. La fonction f est continue décroissante sur l'intervalle $[e^2, +\infty[$ et n'y prend que des valeurs strictement positives, l'équation $f(x) = -5$ ne peut donc pas avoir de solution sur cet intervalle. La fonction est continue strictement croissante sur $]0, e^2]$, donc elle effectue une bijection de cet intervalle vers l'intervalle image $\left]-\infty, \dfrac{10}{e}\right]$. Comme -5 appartient à cet intervalle image, l'équation $f(x) = -5$ admet donc une unique solution α sur $]0, e^2]$ (et donc sur $]0, +\infty[$). De plus, par définition, $\dfrac{5\ln(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} = -5$, donc $\ln(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$ et en passant tout à l'exponentielle, $\alpha = e^{-\sqrt{\alpha}}$ cette équation ne se résout pas plus que la précédente).

Exercice 3

1. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est ouvert si chaque élément lui appartenant peut être entouré par un intervalle ne contenant que des éléments appartenant à ce sous-ensemble (en topologie, on dit que chaque point de A est **intérieur** à A, autrement dit il n'y a aucun point de A qui soit « au bord » de A).

2. Soit $x \in]0, +\infty[$, par hypothèse $x > 0$, donc $\dfrac{x}{2} > 0$. En posant $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$, on constate que l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[= \left]\dfrac{x}{2}, \dfrac{3x}{2}\right[\subset]0, +\infty[$, ce qui prouve que A est ouvert.
3. Commençons par constater que $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, et choisissons un élément x appartenant à ce complémentaire. On doit alors distinguer deux cas : si $x < 0$, on pose $\varepsilon = -\dfrac{x}{2}$ (qui est bien un réel strictement positif), et on constate similairement à la question précédente que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[= \left]\dfrac{3x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[\subset]-\infty, 0[\subset \overline{B}$. Deuxième possibilité, on peut avoir $x > 1$. On pose cette fois $\varepsilon = \dfrac{x-1}{2}$ (qui est à nouveau un réel strictement positif) pour avoir $x - \varepsilon = \dfrac{x+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$, ce qui permet d'obtenir $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]1, +\infty[\subset \overline{B}$. On a bien prouvé que $\overline{B}$ était ouvert, et donc que B est un ensemble fermé.
4. On peut par exemple prendre $C = [0, 1[$. L'ensemble C ne peut pas être ouvert car $0 \in C$, et quel que soit le choix d'un réel $\varepsilon > 0$, on n'aura jamais $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset [0, 1[$ puisque l'intervalle de gauche contiendra toujours des valeurs strictement négatives (constatation qui traduit simplement le fait que 0 est « au bord » de l'intervalle $[0, 1[$). Mais de même, $\overline{C} =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ ne peut pas être ouvert car aucun intervalle de la forme $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ ne peut être inclus dans $\overline{C}$.

   Deux exemples particulièrement stupides d'ensembles à la fois ouverts et fermés : $\mathbb{R}$ tout entier et $\emptyset$ (qui sont complèmentaires l'un de l'autre et tous les deux ouverts de façon assez évidente). Ce sont en fait les deux seuls exemples (c'est lié à une propriété de $\mathbb{R}$ appelée connexité, qui signifie en gros que $\mathbb{R}$ est constitué d'un seul morceau).
5. Supposons donc que A et B soient tous les deux ouverts, et considérons $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, par hypothèse, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A \subset A \cup B$, et s'il appartient à B c'est pareil. L'ensemble $A \cup B$ est donc ouvert. Pour l'intersection c'est un tout petit peu plus compliqué : si $x \in A \cap B$, il existe **deux** réels (qui n'ont aucune raison d'être égaux) $\varepsilon_A > 0$ et $\varepsilon_B > 0$ tels que $]x - \varepsilon_A, x + \varepsilon_A[\subset A$ et $]x - \varepsilon_B, x + \varepsilon_B[\subset B$. On note alors tout bêtement ε le plus petit de ces deux réels (qui reste bien sûr strictement positif), et on a certainement $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$ (soit c'est le même intervalle qu'avant, soit il est plus petit), et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset B$, donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A \cap B$, ce qui prouve que $A \cap B$ est ouvert.

   Si C et D sont deux fermés, on peut poser $A = \overline{C}$ et $B = \overline{D}$, et affirmer que ces deux sous-ensembles sont ouverts. Les démonstration précédentes prouvent alors que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont toujours ouverts, mais les lois de Morgan affirment que $\overline{C \cup D} = A \cap B$, et $\overline{C \cap D} = A \cup B$, ce qui prouve donc que $C \cup D$ et $C \cap D$ sont fermés (puisque leurs complémentaires sont ouverts).
6. C'est exactement la même démonstration que ci-dessus. Si A_i est ouvert quel que soit l'indice $i \in I$, et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $\exists i \in I$, $x \in A_i$, puis $\exists \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, donc l'union est bien ouverte. Symétriquement, une intersection quelconque de fermés est donc fermée.
7. On peut par exemple poser $A_n = \left]0, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Chacun de ces ensembles est ouvert (tout intervalle ouvert est ouvert), et leur intersection est égale à $]0, 1]$ qui n'est pas ouvert.
8. Non, $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, aucun élément de $\mathbb{Q}$ ne peut être placé dans un intervalle ne contenant que des rationnels puisqu'aucun intervalle de $\mathbb{R}$ ne contient que des rationnels. Mais symétriquement, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient des rationnels, donc $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ n'est pas non plus ouvert, ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 4

1. On calcule bêtement $P_1 = 1+1 = 2$, $P_2 = 2 \times \left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}$, et enfin $P_3 = P_2 \times \left(1+\frac{1}{9}\right) = \frac{50}{18} = \frac{25}{9}$.
2. La fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. La fonction f est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet en particulier un minimum en 0 égal à $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, donc f est toujours positive, ce qu'on cherchait à prouver.
3. Le plus simple est de brutalement tout passer à droite : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée.
4. En utilisant la question précédente, on peut écrire que $\frac{1}{4} \leqslant 1 - \frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, etc, jusqu'à $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Si on ajoute toutes ces majorations, on trouve $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ après simplifications. Il ne reste plus qu'à ajouter 1 de chaque côté pour obtenir $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2$. On exploite ensuite l'inégalité de la question 2 pour tous les nombres de la forme $1 + \frac{1}{k^2}$: $\ln(1+1) \leqslant 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{1}{4}$ etc, dont on déduit que $\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant 2$. Or, les propriétés de la fonction ln font que la somme de ln du membre de gauche est égale au ln du produit. Autrement dit, on a prouvé que $\ln(P_n) \leqslant 2$, et donc que $P_n \leqslant e^2$.
5. En fait le membre de gauche vaut $\frac{k^2+1}{k^2}$ et celui de droite $\frac{k^2}{k^2-1}$. On a donc deux expressions de la forme $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, pour $x = k^2$ et $x = k^2?1$ respectivement. Or, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui prouve qu'elle prend une valeur plus grande en $k^2 - 1$ (qui est bien strictement positif si $k \geqslant 2$) qu'en k^2. Cela prouve l'inégalité demandée.
6. La question précédente permet d'obtenir la majoration $P_n \leqslant 2 \times \frac{2^2}{1 \times 3} \times \frac{3^2}{2 \times 4} \times \frac{4^2}{3 \times 5} \times \cdots \times \frac{n^2}{(n-1) \times (n+1)}$. Tous les entiers compris entre 2 et n apparaissent deux fois en facteur aux différents dénominateurs, sauf 2, n et $n+1$ qui n'apparaissent qu'une fois. Après simplification avec tous les carrés du numérateur, il reste donc $P_n \leqslant 2 \times \frac{2 \times n}{n+1} = 4 \times \frac{n}{n+1} \leqslant 4$. Cette nouvelle majoration est nettement meilleure que la précédente puisque e^2 est légèrement plus grand que 7.
7. La suite (P_n) est croissante car à chaque étape on multiplie P_n qui est un réel positif par un réel strictement supérieur à 1. On vient de prouver deux fois qu'elle était aussi majorée, elle converge donc.

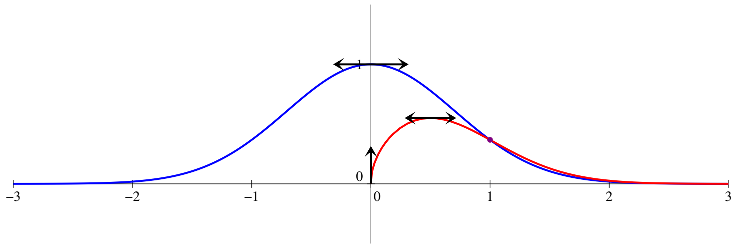
Exercice 5

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et paire ($f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$). Avec l'ajout du produit par la racine carrée, on a bien sûr $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+$, et la fonction g ne peut donc pas être paire ou impaire ($f(-x)$ n'existe même pas quand $x > 0$!).

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, qui est de signe opposé à celui de x. Il y aura donc un maximum atteint pour $f(0) = e^0 = 1$. De plus, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (aucune difficulté ici), ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. La fonction f' est elle-même dérivable, et $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{x-2}$, qui est du signe de $2x^2 - 1$ (quitte à factoriser encore par 2). Elle s'annule en particulier lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, donc pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On notera donc $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $f''(x) \geqslant 0$ sur les deux intervalles $]-\infty, -a]$ et $[a, +\infty[$, et $f''(x) \leqslant 0$ sur $[-a, a]$.
4. On a besoin pour cela de calculer $f(a) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, et $f'(a) = -2a \times f(a) = -\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{e}} = -\sqrt{\dfrac{2}{e}}$. La tangente a donc pour équation $y = -\sqrt{\dfrac{2}{e}}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{e}} = -\sqrt{\dfrac{2}{e}}x + \dfrac{2}{\sqrt{e}}$.
5. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ (mais a priori pas en 0, puisque la racine carrée n'est pas dérivable en 0), et $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} - 2x\sqrt{x}e^{-x^2} = \dfrac{e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(1-4x^2)e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$, dérivée qui est du signe de $1 - 4x^2$. Cette expression s'annule pour $x^2 = \dfrac{1}{4}$, donc en $x = \pm\dfrac{1}{2}$, et elle est positive entre ses deux racines, donc sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ (rappelons que g n'est définie que sur $[0, +\infty[$). Il y a donc un maximum atteint pour $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{e}}}$, et g est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
6. La fonction g étant définie en 0 (on a simplement $g(0) = 0$), il n'y a qu'une seule limite à calculer, qui est généreusement fournie dans l'énoncé : on prend simplement $k = \dfrac{1}{2}$ dans la croissance comparée donnée avant le début des questions, ce qui fournit tout de suite $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. La limite demandée pour la dérivée ne pose aucun problème puisqu'il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim_{x\to 0}(1-4x^2)e^{-x^2} = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$, donc $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty$. On peut en déduire la présence d'une tangente verticale à la courbe représentative de g à l'origine du repère.
7. On calcule simplement $g(x) - f(x) = (\sqrt{x} - 1)e^{-x^2}$, qui est du signe de $\sqrt{x} - 1$. La courbe représentative de g est donc au-dessus de celle de f sur $[1, +\infty[$, en-dessous sur $[0, 1]$, et les deux courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.
8. Pour f, pas besoin de valeur approchée de quoi que ce soit. Pour g, le maximum est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{e}}} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{3.3}} \simeq \dfrac{1}{1.6} \simeq 0.6$. Ci-dessous, la courbe de f en bleu et celle de g en rouge (leur point d'intersection est indiqué en violet, on ne voit pas grand chose à la position relative car les deux fonctions tendent trop vite vers 0) :



1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3