Devoir Surveillé n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

17 septembre 2022

Exercice 1

Écrire sous forme d'énoncé quantifié les propriétés suivantes (dans chacune des propositions, f et g désignent des fonctions réelles qui apparaîtront dans les énoncés sous forme de variables libres) :

1. g n'est pas une fonction constante.
2. f est une fonction paire.
3. g est une fonction périodique de période 2π.
4. g est une fonction périodique (période non précisée).
5. f est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.
6. les courbes représentatives de f et de g se coupent au moins une fois.
7. f est strictement inférieure à g.
8. f n'est pas strictement inférieure à g.
9. g n'est majorée par aucun réel (on dit que g est majorée par un réel M si toutes les valeurs prises par la fonction g sont inférieures à M).

Exercice 2 (extrait d'un vieux sujet de bac)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln(x)}{\sqrt{x}}$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$, en déduire éventuellement la présence d'asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations complet.
3. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 1.
4. Tracer dans un même repère une allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente (T).
5. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{e^2} f(t)\ dt$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution α, et que α est également solution de l'équation $e^{-\sqrt{x}} = x$ (on ne cherchera absolument pas à calculer la valeur de α).

Exercice 3

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}$ s'il vérifie la propriété suivante : $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un **fermé** de $\mathbb{R}$ si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

1. Traduire en français la définition de sous-ensemble ouvert (interdiction d'utiliser des symboles mathématiques).

2. Montrer que le sous-ensemble $A =]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que le sous-ensemble $B = [0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne soit ni ouvert ni fermé (en justifiant rapidement votre réponse). Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut-il être à la fois ouvert et fermé ?
5. Montrer que, si A et B sont deux ouverts de $\mathbb{R}$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont encore des ouverts. En déduire que l'union ou l'intersection de deux fermés reste également fermée.
6. Montrer plus généralement qu'une union infinie d'ouverts est un ouvert. Quelle propriété symétrique pour les fermés peut-on en déduire ?
7. Donner un exemple montrant qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.
8. Le sous-ensemble $A = \mathbb{Q}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}$? Fermé ? Aucun des deux ?

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à estimer la valeur du produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Donner la valeur explicite de P_1, P_2 et P_3 (sous forme de fraction simplifiée).
2. Montrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
3. Démontrer l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.
4. En déduire que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2$, puis que $P_n \leqslant e^2$.
5. On souhaite obtenir une meilleure majoration, prouver pour cela l'inégalité $1+\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$, toujours valable pour tout entier $k \geqslant 2$.
6. En déduire par une méthode similaire à celle de la question 4 que $P_n \leqslant 4$.
7. Expliquer pourquoi la suite (P_n) converge quand n tend vers $+\infty$ (sans chercher à calculer sa limite).

Exercice 5

On définit pour cet exercice les deux fonctions f et g par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x} \times e^{-x^2}$. On aura le droit d'utiliser le résultat suivant sans justification : $\forall k \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{x \to +\infty} x^k e^{-x^2} = 0$. On donne par ailleurs les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{e} \simeq 1.65$ et $\frac{1}{e} \simeq 0.36$.

1. Préciser le domaine de définition et la parité éventuelle des fonctions f et g.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f, et étudier son signe. On notera en particulier a l'unique réel positif vérifiant $f''(a) = 0$.
4. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a.
5. Étudier les variations de la fonction g.
6. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition, ainsi que $\lim_{x \to 0} g'(x)$. Que peut-on déduire de ce dernier calcul concernant la courbe représentative de la fonction g ?
7. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.
8. Représenter ces deux courbes dans un même repère (on essaiera de donner une valeur approchée des éventuels minima ou maxima de ces deux fonctions).