

Devoir Surveillé n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 juin 2023

Exercice : probabilités

- On a $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 10\}$ et $\forall k \in X(\Omega)$, $p_k = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$.
- Encore une question de cours : $\mathbb{E}(X) = 10 \times \frac{1}{5} = 2$, et $\mathbb{V}(X) = 10 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$. Or, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5}$.
- (a) Le nombre d'enfants appartenant à une famille de k enfants vaut par définition kM_k , donc $N_k = kp_kM$.
(b) On calcule simplement $N = \sum_{k=0}^{10} N_k = \sum_{k=0}^{10} kp_kM = \mathbb{E}(X)M = 2M$.
(c) Cette proportion est égale à $\frac{N_k}{N} = \frac{kp_k}{2}$ d'après les questions précédentes.
- (a) On a bien sûr $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ puisqu'un enfant interrogé est forcément issu d'une famille qui a des enfants (au moins un en tout cas!). De plus, $\forall k \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y = k) = q_k = \frac{kp_k}{2}$, c'est exactement ce qu'on a calculé à la question 3. Il ne peut sûrement pas s'agir de la même loi que celle de X puisque l'univers-image des deux variables n'est même pas le même.
(b) On écrit simplement $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 p_k = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X^2) = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)}$.
(c) En reprenant les calculs de la question 2, on obtient $\mathbb{E}(Y) = \frac{14}{5}$, soit une valeur plus élevée que celle de $\mathbb{E}(X)$. C'est tout à fait normal : les familles nombreuses apportant plus d'enfants à la communauté, on a une probabilité plus grande quand on choisit un enfant au hasard de tomber sur un enfant de famille nombreuse (à nombre de familles égal pour chaque nombre d'enfants possible), ce qui augmente l'espérance.
- Si on admet que la formule de la question 4.b reste valable, on a pour une loi uniforme $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{2}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{15}{12} + \frac{25}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ (on applique simplement les formules du cours une fois de plus), dont on déduit $\mathbb{E}(Y) = 3$. Là encore, l'espérance de Y est un peu plus grande que celle de X (et c'est tout aussi normal).

Problème 1 : analyse

A. Généralités.

- La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est définie et continue sur $[0, 1]$ à condition que son dénominateur ne s'y annule pas. Or, si $x > 0$, on aura $x+t > 0$ sur tout l'intervalle $[0, 1]$, donc $f(x)$ est une

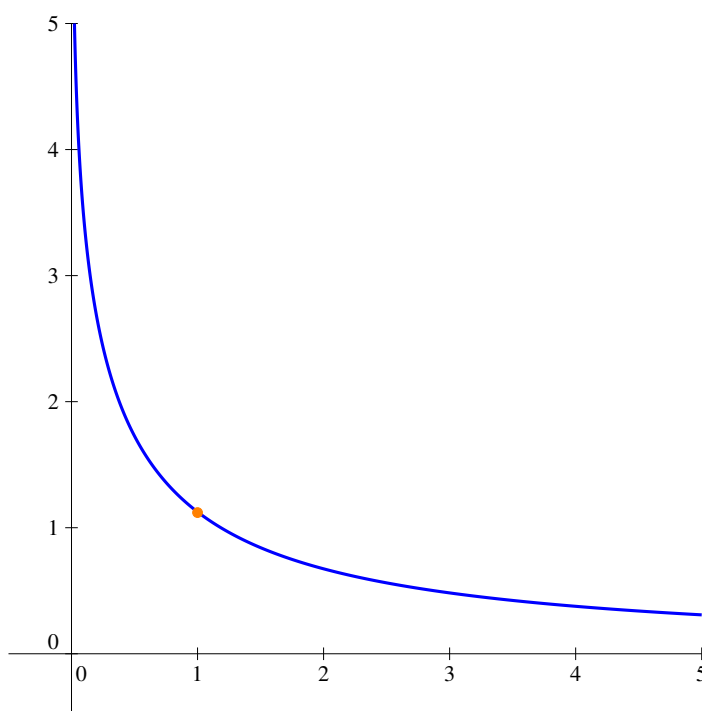
intégrale de fonction continue sur un segment quand $x > 0$, ce qui assure son existence. Le même argument prouverait d'ailleurs que f est également définie sur $] -\infty, -1[$, ce qui n'était pas demandé dans l'énoncé.

2. Si $x > 0$ et $t \in [0, 1]$, $\frac{e^t}{x+t} > 0$, la positivité de l'intégrale assure donc que $f(x) \geq 0$.
3. On pose très simplement $u = t + x$ (donc $t = u - x$), ce qui ne modifie pas l'élément différentiel ($du = dt$) et change les bornes en x et $x + 1$. On obtient alors $f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du = e^{-x} \int_0^1 \frac{e^u}{u} du$ en sortant de l'intégrale le facteur e^{-x} qui ne dépend pas de la variable d'intégration.
4. La fonction $z : u \mapsto \frac{e^u}{u}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$. En notant Z une primitive quelconque de z , la fonction Z sera elle-même de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, et $g(x) = Z(x+1) - Z(x)$ est donc également de classe \mathcal{C}^∞ . De plus, $g'(x) = Z'(x+1) - Z'(x) = z(x+1) - z(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}$.
5. Par définition, $g(x) = e^x f(x)$, donc $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$. Autrement dit, $f(x) + f'(x) = e^{-x} g'(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{ex - x - 1}{x^2 + x}$, et f est bien solution d'une équation de la forme demandée, avec $\alpha(x) = \frac{ex - x - 1}{x^2 + x}$.
6. Notons $\beta(x) = - \int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)^2} dt$, et effectuons une IPP en posant $u(t) = u'(t) = e^t$, et $v'(t) = -\frac{1}{(x+t)^2}$ qu'on intègre en $v(t) = \frac{1}{x+t}$. On peut alors écrire que $\beta(x) = \left[\frac{e^t}{x+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} - f(x)$. Autrement dit, $\beta(x) + f(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} = \alpha(x)$, ce qui prouve que $\beta(x) = y'(x)$.
7. L'expression obtenue à la question précédente montre que $f'(x) < 0$ et donc que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Étant monotone, elle admet donc nécessairement des limites en 0 et en $+\infty$. Comme f est positive (donc minorée par 0), on peut même affirmer qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.

B. Étude asymptotique de la fonction f .

1. On se contente de dire que, $\forall t \in [0, 1]$, $x \leq x+t \leq x+1$, donc $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$. On peut intégrer cet encadrement entre 0 et 1 pour obtenir $\int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt$, soit $\frac{1}{x+1} [e^t]_0^1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} [e^t]_0^1$, ce qui donne bien $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.
2. En multipliant tout l'encadrement par x , on a $\frac{(e-1)x}{x+1} \leq xf(x) \leq e-1$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e-1)x}{x+1} = e-1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = e-1$, donc $f(x) \sim \frac{e-1}{x}$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
4. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle entre 0 et t (avec $t \in]0, 1[$) pour obtenir l'existence d'un réel $c \leq 1$ tel que $\frac{e^t - 1}{t} = e^c \leq e$. L'inégalité demandée en découle, avec $c = e$ (elle reste trivialement valable pour $t = 0$). Les valeurs absolues ne servent strictement à rien puisque $e^t - 1 \geq 0$, et il existe des milliers d'autres façons d'obtenir cette majoration.

5. En exploitant la question précédente, on a $|h(x)| \leq \int_0^1 \frac{|e^t - 1|}{x+t} dt = M \int_0^1 \frac{t}{x+t} dt = M \int_0^1 1 - \frac{x}{x+t} dt = M[t - x \ln(x+t)]_0^1 = M(1 - x \ln(x+1) + x \ln(x))$. Par croissance de la fonction \ln , $x \ln(x) - x \ln(x+1) < 0$, donc $|h(x)| \leq M$, ce qui prouve bien que h est bornée.
6. On remarque que $h(x) = f(x) - \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = f(x) - [\ln(x+t)]_0^1 = f(x) - \ln(x+1) + \ln(x)$. Autrement dit, $f(x) = -\ln(x) + \ln(x+1) + h(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$, donc $\ln(x+1) = o(1)$, et d'après la question précédente $h(x) = O(1)$ puisque la fonction est bornée. Tout cela est donc négligeable par rapport à $-\ln(x)$ qui a une limite infinie en 0, et $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
7. On ne dispose d'à peu près rien d'exploitable donc on fait une courbe au pif (on a quand même indiqué en orange par acquit de conscience le point d'abscisse 1 dont l'ordonnée est précisée dans l'énoncé) :



Problème 2 : algèbre

A. Calcul matriciel.

1. C'est trivial : $F = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, et les deux matrices n'étant pas proportionnelles, elles forment une base de F , qui est donc de dimension 2.
2. On calcule donc $M_{a,b} \times M_{c,d} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} = M_{e,f}$, avec $e = ac - bd$ et $f = ad + bc$.
3. En appliquant simplement la formule précédente, on a $e = a^2 + b^2$ et $f = -ab + ab = 0$, donc $M_{a,b} \times M_{a,-b} = (a^2 + b^2)I_2$. Si $a^2 + b^2 \neq 0$, la matrice $M_{a,b}$ est donc inversible et $M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} M_{a,-b} \in F$. Le seul cas où $a^2 + b^2 = 0$ est quand $a = b = 0$, et dans ce cas $M_{a,b} = 0$ n'est bien sûr pas inversible.

4. On va le prouver par récurrence. La formule est vraie pour $n = 0$: $\rho^0 M_{\cos(0), \sin(0)} = M_{1,0} = I_2 = M_{a,b}^0$. Supposons-la vérifiée au rang n , alors $M_{a,b}^n = \rho^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$, et comme $a = \rho \cos(\theta)$ et $b = \rho \sin(\theta)$, $M_{a,b} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On effectue le produit : $M_{a,b}^{n+1} = \rho^{n+1} \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho^{n+1} \begin{pmatrix} \cos((n+a)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}$, soit exactement la formule souhaitée, si on n'a pas complètement oublié ses formules d'addition trigonométriques. On pouvait aussi exploiter la question 2 pour ne pas écrire explicitement le produit matriciel.

B. Un espace vectoriel de fonctions.

1. La famille étant par définition génératrice de G , il suffit de prouver que (f_1, f_2) est libre, c'est-à-dire que les deux fonctions ne sont pas proportionnelles. Or, $f_1(0) = 0$ et $f_2(0) = 1$, ce qui exclut toute proportionnalité entre les deux fonctions.
2. Soit $f \in G$, donc $f(x) = e^{ax}(\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x))$, alors f est dérivable et $f'(x) = ae^{ax}(\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)) + be^{ax}(\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x)) \in G$, ce qui prouve que φ est un endomorphisme (la linéarité étant évidente). De plus, $\varphi(f_1) = af_1 + bf_2$ et $\varphi(f_2) = af_2 - bf_1$, ce qui prouve que, contre toute attente, $M = M_{a,b}$.
3. Puisqu'on a supposé $b \neq 0$, la matrice $M_{a,b}$ est inversible et φ bijective. Or, une primitive de f appartenant à G est exactement un antécédent de f par φ , qui existe donc toujours. En particulier, avec la formule obtenue pour $M_{a,b}^{-1}$, une primitive de f_1 sera $\frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax}(a \sin(bx) - b \cos(bx))$.
4. Soit on utilise les calculs de la partie A, soit on recalcule $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = aM - b^2 I_2$. On en déduit immédiatement que $\varphi^2 = a\varphi - b^2 id$, autrement dit que toute fonction $f \in G$ vérifie $f'' = af' - b^2 f$.

C. Diagonalisation de la matrice $M_{a,b}$.

1. Pour obtenir le noyau $\ker(f - \omega id)$, on doit résoudre le système $\begin{cases} ax - by = (a + ib)x \\ bx + ay = (a + ib)y \end{cases}$, soit $\begin{cases} -ibx - by = 0 \\ bx - iby = 0 \end{cases}$. La première équation donne $y = -ix$ et la deuxième $x = iy$, c'est-à-dire deux conditions équivalentes. Les éléments du noyau sont donc les vecteurs de la forme $\lambda(1, -i)$, ce qui correspond bien à $\ker(f - \omega id) = \text{Vect}(u)$. De même, le calcul de $\ker(f - \bar{\omega} id)$ se ramène au système $\begin{cases} ax - by = (a - ib)x \\ bx + ay = (a - ib)y \end{cases}$. Cette fois, les deux équations sont équivalentes à $y = ix$ et $x = -iy$, à nouveau des conditions équivalentes qui mènent à $\ker(f - \bar{\omega} id) = \text{Vect}(v)$.
2. Les deux vecteurs n'étant manifestement pas proportionnelles, la famille (u, v) est libre, et donc une base de \mathbb{C}^2 qui est de dimension 2. La matrice P est définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. On peut l'inverser à l'aide de la méthode du système : $\begin{cases} x + y = \alpha \\ -ix + iy = \beta \end{cases}$. On effectue par exemple l'opération $iL_1 + L_2$ pour obtenir $2iy = i\alpha + \beta$, donc $y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}i\beta$, puis on en déduit $x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}i\beta$. La matrice est donc inversible (normal pour une matrice de passage),

d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

3. Les vecteurs u et v étant des vecteurs propres pour f , on obtient effectivement sans calcul $D = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$. De plus, $D = P^{-1}M_{a,b}P$, donc $M_{a,b} = PDP^{-1}$.
4. On peut également écrire $D = \begin{pmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, dont on déduit immédiatement $D^n = \rho^n \begin{pmatrix} e^{in\theta} & 0 \\ 0 & e^{-in\theta} \end{pmatrix}$. On prouve par récurrence que $M_{a,b}^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai de façon évidente au rang 0 (et on sait que c'est également vrai au rang 1), et en supposant la forme vérifiée au rang n , $M_{a,b}^{n+1} = M_{a,b} \times M_{a,b}^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il ne reste plus qu'à calculer le produit de matrices : $PD^n = \rho^n \begin{pmatrix} e^{in\theta} & e^{-in\theta} \\ -ie^{in\theta} & ie^{-in\theta} \end{pmatrix}$, puis $M_{a,b}^n = \frac{\rho^n}{2} \begin{pmatrix} e^{in\theta} + e^{-in\theta} & ie^{in\theta} - ie^{-in\theta} \\ -ie^{in\theta} + ie^{-in\theta} & e^{in\theta} + e^{-in\theta} \end{pmatrix} = \rho^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$. On retrouve bien le résultat de la partie A.

D. Étude d'une suite.

1. La fonction est dérivable partout où elle est définie, et $h'_{M_{a,b}}(x) = \frac{a(bx+a) - b(ax-b)}{(bx+a)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(bx+a)^2}$, donc la fonction est strictement croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Les limites sont faciles à calculer (on note simplement la fonction h par pure paresse) : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \frac{a}{b}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^-} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^+} h(x) = -\infty$ (on fait un petit tableau de signe si on tient vraiment à justifier très rigoureusement les signes). On constate donc que les images des deux intervalles de définition de h sont disjointes, et donc que h est bijective de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{a}{b} \right\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{b} \right\}$.
2. D'après les calculs de la partie A, la fonction $h_{M_{a,b}^{-1}}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{b} \right\}$ par $h_{M_{a,b}^{-1}}(x) = \frac{ax+b}{a-bx}$. Les intervalles de définition sont donc cohérents, il suffit de calculer la composée des deux fonctions pour prouver leur réciprocity : $h_{M_{a,b}^{-1}} \circ h_{M_{a,b}}(x) = \frac{a \times \frac{ax-b}{bx+a} + b}{a - b \times \frac{ax-b}{bx+a}} = \frac{a^2x - ab + b^2x + ab}{abx + a^2 - bax + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2} = x$. La composée donne l'application identité, on a bien prouvé la réciprocity.
3. Clairement, u_1 est définie si $u_0 \neq -\frac{a}{b}$, donc simplement si $a \neq 0$ puisque $u_0 = 0$. Pour que u_2 soit défini, on doit avoir $u_1 \neq -\frac{a}{b}$, donc $0 \neq h_{M_{a,b}^{-1}}\left(-\frac{a}{b}\right)$, soit $0 \neq \frac{-\frac{a^2}{b} + b}{a+b} = \frac{b^2 - a^2}{b(a+b)}$. On doit donc avoir $b \neq \pm a$.
4. (a) On va procéder par récurrence : puisque $u_0 = 0$, la propriété est vraie au rang 0 avec $\alpha_0 = 1$. Supposons donc le résultat correct au rang k avec $k < p$, alors en exploitant l'hypothèse de récurrence $M_{a,b}^{k+1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_k \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_k \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_k \times \begin{pmatrix} au_k - b \\ a + bu_k \end{pmatrix} = \alpha_k(a + bu_k) \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}$, calcul légitime puisque l'hypothèse d'existence des termes de la suite jusqu'à u_p implique que $a + bu_k \neq 0$. L'hérédité est donc prouvée en posant $\alpha_{k+1} = (a + bu_k)\alpha_k$.

- (b) En reprenant la formule précédente avec l'expression explicite calculée plus haut pour $M_{a,b}^p$, on obtient les équations $-\rho^p \sin(p\theta) = \alpha_p u_p$ et $\rho^p \cos(p\theta) = \alpha_p$ (qui est par hypothèse non nul), donc $u_p = -\frac{\rho^p \sin(p\theta)}{\rho^p \cos(p\theta)} = -\tan(p\theta)$.
- (c) C'est en fait une conséquence immédiate des calculs précédents : si $\cos((p+1)\theta) = 0$ alors $\alpha_{p+1} = 0$ et le terme u_{p+1} n'est plus calculable. Inversement, si le cosinus n'est pas nul, on aura bien sûr la même formule $u_{p+1} = -\tan((p+1)\theta)$ qui restera valable.
5. Si on veut que tous les termes de la suite soient correctement définis, il faut donc qu'aucun $\cos(n\theta)$ ne s'annule, donc que $n\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right]$, donc que θ ne puisse pas s'écrire sous la forme $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. C'est bien la condition de l'énoncé, en remplaçant n par q et k par p .