Devoir Maison n° 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

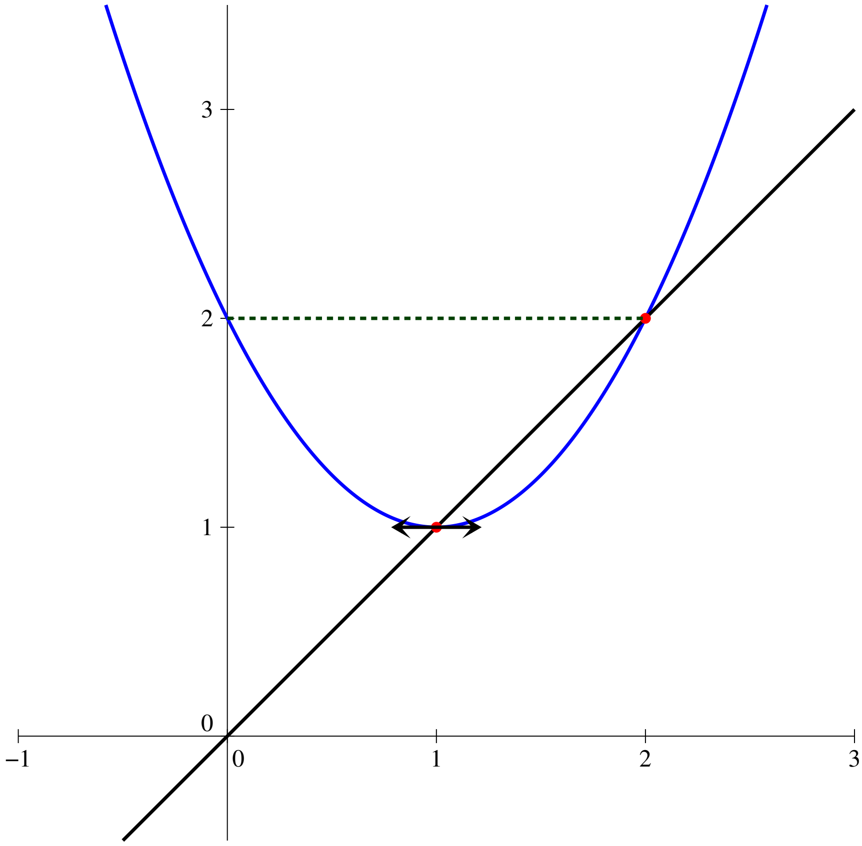
17 mars 2023

Exercice 1 : suites récurrentes.

On va bien entendu commencer par poser $f(x) = x^2 - 2x + 2$, et étudier la fonction f. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2x - 2$, donc elle est décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, admettant un minimum de valeur $f(1) = 1$. De plus, $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, donc on a deux points fixes pour f, avec $f(x) - x \leqslant 0$ uniquement sur l'intervalle $[1, 2]$. Les limites sont évidentes, on peut résumer tout ça dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tant qu'on y est, un petit dessin ne peut sûrement pas faire de mal. D'ailleurs, la courbe suffit presque à comprendre ce qui va se passer en fonction de u_0, mais précisons quand même les différents cas, de la droite vers la gauche (c'est plus pratique) :



- l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f (en effet, si $x > 2$, f étant croissante sur l'intervalle, on aura $f(x) > f(2) = 2$), donc si $u_0 > 2$, on aura par récurrence triviale $u_n > 2$ pour tout entier naturel n. Or, sur cet intervalle, $f(x) - x > 0$, ce qui prouve qu'on aura toujours $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite (u_n) sera strictement croissante. Si elle convergeait, ce serait nécessairement vers une limite $l \geqslant u_0 > 2$. Or, f n'a aucun point fixe vérifiant cette condition. La suite ne peut donc pas converger, et on en déduit qu'on aura toujours $\lim u_n = +\infty$ dans ce cas.
- si $u_0 = 2$, la suite sera bien sûr constante égale à 2.
- l'intervalle $I =]1, 2[$ est stable par f (toujours par croissance de f, donc $u_n \in I$ pour tout entier n si $u_0 \in I$. Cette fois-ci, $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle I, donc la suite sera décroissante, donc convergente puisqu'elle est bornée. Sa décroissance l'empêchant de converger vers le point fixe 2, on a nécessairement $\lim u_n = 1$. Si on veut estimer la vitesse de convergence de la suite en exploitant l'IAF, il faudra le faire sur un intervalle sur lequel $|f'(x)| < 1$, ce qui force à se limiter à un intervalle inclus dans $\left]1, \frac{3}{2}\right[$ et n'a du coup que peu d'intérêt. On ne le fera donc pas.
- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 \in]0, 1[$, on aura $u_1 \in]1, 2[$ (en effet la fonction f est décroissante sur $]0, 1[$ avec $f(0) = 2$, donc $f(]0, 1[) =]1, 2[$). L'étude précédente montre alors que la suite va converger vers 1.
- si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite est stationnaire égale à 2 à partir du rang 2.
- si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 2$, et la suite va diverger vers $+\infty$ (et sera accessoirement strictement croissante).

Exercice 2 : encadrements de π.

1. Ces calculs figuraient dans le cours du chapitre de trigo ! On utilise par exemple le fait que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ pour obtenir $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. On calcule suite $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}$. On aura du mal à obtenir plus simple.

2. (a) Ce polynôme a pour racine évidente 1 (puisque $2-3+1=0$), on peut donc le factoriser sous la forme $P = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$. Une petite identification donne alors $a=2$, $b-a=-3$ donc $b=-1$, puis $c-b=0$ donc $c=-1$ (ce qui est cohérent avec la dernière condition sur le coefficient constant). Autrement dit, $P=(X-1)(2X^2-X-1)$. Tiens, il semblerait en fait que $X=1$ soit racine double du polynôme (on aurait bien sûr pu s'en rendre compte en le dérivant au cas où), la troisième racine est $X=-\dfrac{1}{2}$ puisque la somme des racines est égale à $\dfrac{3}{2}$. Finalement, on obtient donc la factorisation $P=(X-1)^2(2X+1)$. Ce polynôme est manifestement du signe de $2X+1$, donc positif sur $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, je refuse de m'abaisser à faire un tableau pour quelque chose d'aussi trivial.

   (b) On va bien sûr dériver la fonction (oui, elle est dérivables, par théorèmes généraux) : $h'(x) = \dfrac{2}{3}\cos(x) + \dfrac{1}{3\cos^2(x)} - 1 = \dfrac{2\cos^3(x)-3\cos^2(x)+1}{3\cos^2(x)} = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$. Notre dérivée est donc du signe de $P(\cos(x))$, qui sera positif si et seulement si $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$, ce qui est évidemment le cas sur tout l'intervalle I. La fonction h est donc croissante sur I, avec $h(0)=0$ (tout est nul en 0) et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$ (seule la tangente ayant une limite infinie à cet endroit). Quoi ? Faire un tableau de variations ? Ça va pas non, beaucoup trop trivial tout ça.

   (c) Je propose à nouveau de dériver brutalement la fonction : $i'(x)$ $= 1 - \dfrac{3\cos(x)(2+\cos(x))+3\sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \dfrac{(2+\cos(x))^2-6\cos(x)-3\cos^2(x)-3(1-\cos^2(x))}{(2+\cos(x))^2} = \dfrac{\cos^2(x)-2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2} = \dfrac{(\cos(x)-1)^2}{(\cos(x)+2)^2}$, qui est manifestement toujours positif. La fonction i est donc elle aussi croissante, et vérifie $i(0)=0$, et $i\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{2}$ (ce qui est très proche de 0, la fonction prend donc des valeurs très faibles sur tout l'intervalle). Inutile de vous préciser que vous n'aurez toujours pas droit à un tableaude variations.

   (d) En effet, on a prouvé que, sur I, $g(x) \leqslant x \leqslant f(x)$. Je ne sais pas quoi dire de plus sur cette question trivialissime.

   (e) On va bien sûr appliquer l'encadrement de la question précédente à $x=\dfrac{\pi}{12}$, ce qui donne $\dfrac{36\sin(\frac{\pi}{12})}{2+\cos(\frac{\pi}{12})} \leqslant \pi \leqslant 8\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+4\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, soit $\dfrac{36(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} \leqslant \pi \leqslant 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})+8-4\sqrt{3}$. Évidemment, comme ça, ce n'est pas très parlant, mais les valeurs approchées sont assez révélatrices : le membre de gauche vaut environ 3.14151 et celui de droite à peu près 3.14235. Sachant que $\pi \simeq 3.14159$, on est déjà pas mal (surtout pour l'approximation par défaut).

3. On va bien sûr appliquer ce même encadrement pour $x = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$, ce qui donne $\dfrac{3a_n}{2+b_n} \leqslant \dfrac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{a_n}{3b_n}$. On multiplie partout par 3×2^n et, à la surprise générale, ça donne

$\dfrac{9 \times 2^n a_n}{2 + b_n} \leqslant \pi \leqslant 2^{n+1} a_n + \dfrac{2^n a_n}{b_n}$, donc exactement l'encadrement de l'énoncé. Pour $n = 3$, il faut donc connaître les cosinus et sinus de $\dfrac{\pi}{24}$ (cf premier exercice de la feuille d'exercices de trigo si vous tenez à avoir des formules exactes). Plus basiquement, on va à nouveau donner des valeurs approchées : à gauche, 3.141588 et à droite 3.141639. On s'est encore rapprochés, mais pas tant que ça, le gain par rapport au cas $n = 2$ n'est pas monstrueux.