

# Devoir Maison n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 17 mars 2023

## Exercice 1 : suites récurrentes.

Étudier la nature des suites vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$  en fonction de la valeur du terme initial  $u_0$ . On essaiera bien sûr d'être le plus complet possible, en appliquant l'IAF sur un intervalle bien choisi dans les cas où la suite converge, et en proposant des illustrations sous forme de graphes (on a même le droit d'utiliser Python!).

## Exercice 2 : encadrements de $\pi$ .

1. Calculer les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$  (en donnant pour cette dernière une forme la plus simple possible).
2. On définit sur l'intervalle  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  deux fonctions  $f$  et  $g$  par  $f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x))$  et  $g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}$ .
  - (a) Factoriser le polynôme  $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$  et donner son tableau de signe sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) On pose  $h(x) = f(x) - x$ , étudier les variations de  $h$  sur  $I$  et dresser son tableau de variations complet.
  - (c) On pose  $i(x) = x - g(x)$ , étudier ses variations sur  $I$  et dresser son tableau de variations complet.
  - (d) Dédire des questions précédentes que,  $\forall x \in I$ ,  $g(x) \leq x \leq f(x)$ .
  - (e) En reprenant les résultats de la question 1, en déduire un encadrement de  $\pi$ .
3. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$  et  $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ .

Montrer que  $9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} \leq \pi \leq 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$ .

Quelle est la qualité des approximations obtenues pour  $n = 3$  (on a le droit pour répondre à cette question de ne pas chercher à calculer à la main les lignes trigonométriques de l'angle  $\frac{\pi}{24}$  et de se contenter de faire calculer les valeurs numériques par la première calculatrice venue)?