Devoir Maison n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 février 2023

Exercice 1 : à la découverte des nombres merveilleux.

1. Pour $n = 1$, on a $\left(\frac{3}{2}\right)^{2^1} = \frac{9}{4}$, dont la partie entière vaut 2. Comme $2 + 2$ est un carré, la condition de l'énoncé est vérifiée pour $n = 1$. Testons donc pour $n = 2$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{(2^2)} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$, qui a une partie entière égale à 5. Comme $5 + 2 = 7$ n'est pas franchement un carré, le nombre $\frac{3}{2}$ n'est donc pas pétillant. De même, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ a une partie entière égale à 6, et $6 + 2$ n'est pas un carré donc $\frac{5}{2}$ n'est pas non plus merveilleux (même pas besoin d'aller jusqu'à $n = 2$).
2. Si $x \in [0, 1[$, $x^2 \in [0, 1[$, donc $\lfloor x^2 \rfloor + 2 = 2$ n'est pas un carré, ce qui suffit à prouver que x ne peut pas être merveilleux. Un seul cas particulier à gérer en plus, le cas où $x = 1$, pour lequel $x^2 + 2 = 3$ n'est pas un carré, donc 1 n'est pas non plus merveilleux.
3. Supposons donc x merveilleux, alors $\forall n \geqslant 1$, $(x^2)^{2^n} = x^{2^{n+1}}$, avec $n + 1 \geqslant 1$ (il est même supérieur ou égal à 2), donc $\left\lfloor (x^2)^{2^n} \right\rfloor + 2$ est un carré parfait, ce qui prouve que x^2 est merveilleux. Une récurrence triviale permet alors de prouver que, si x est merveilleux, $x^{(2^k)}$ est également merveilleux pour tout entier naturel k. Or, la question précédente montre que $x > 1$ s'il est merveilleux, et dans ce cas les nombres $x^{(2^k)}$ sont tous deux à deux distincts (la suite $(x^{(2^n)})$ étant strictement croissante), ce qui donne bien une infinité de réels merveilleux.
4. (a) On va bien sûr procéder par récurrence. Par hypothèse, $k \geqslant 1$, donc $(k + 1)^2 \geqslant 2^2 = 4$, et a fortiori $u_1 \geqslant 3$. Si on suppose désormais que $u_n \geqslant 3$, alors $u_n - 1 \geqslant 2$, donc $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \geqslant 4$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

   (b) Par définition, on pose simplement $a_n = (u_n - 2)^{\frac{1}{2^n}}$ et $b_n = (u_n - 1)^{\frac{1}{2^n}}$. Puisque $u_n - 2$ et $u_n - 1$ sont des réels strictement positifs, ces puissances existent, et l'unicité est évidente. On constate par ailleurs que a_n et b_n sont nécessairement supérieurs à 1, ce qui va nous servir dans la question suivante.

   (c) On peut écrire $a_{n+1}^{(2^{n+1})} = u_{n+1} - 2 = (u_n - 1)^2 - 2 = (a_n^{2^n} + 1)^2 - 2 = a_n^{2^{n+1}} + 2a_n^{2^n} - 1 > a_n^{2^{n+1}}$ puisque $a_n \geqslant 1$, donc $2a_n^{2^n} - 1 \geqslant 0$. En passant au $\log_{2^{n+1}}$ (qui est une fonction croissante), on en déduit que $a_{n+1} > a_n$, autrement dit que la suite (a_n) est croissante.
   De même, $b_{n+1}^{2^{n+1}} = u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 - 1 = b_n^{2^{n+1}} - 1 < b_n^{2^{n+1}}$, ce qui prouve encore beaucoup plus rapidement que (b_n) est décroissante. La suite (b_n) étant par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement. De plus, $a_n \leqslant b_n$ pour tout entier n (cela découle immédiatement des définitions des deux suites), donc (a_n) est majorée par exemple par b_0 et converge également.

   (d) Les inégalités déjà obtenues sur les deux suites prouvent qu'on a toujours $a_n \leqslant l \leqslant b_n$ (si on avait $l > b_n$, on finirait par avoir un terme a_p de la suite (a_n) qui serait strictement supérieur à b_n, et donc à b_p puisque la suite (b_n) est décroissante, ce qui ne peut pas arriver). En particulier, cet encadrement est vrai pour $n = 1$. Or, par définition, $a_1^2 = u_1 - 2 = (k+1)^2 - 2 = k^2 + 2k - 1$, donc $a_1 = \sqrt{k^2+2k-1} > \sqrt{k^2} = k$, donc $l \geqslant k$. De même, $b_1 = \sqrt{k^2+2k} \leqslant \sqrt{k^2+2k+1} = k+1$, donc $l \leqslant k+1$. On peut mettre des inégalités strictes partout sans rien changer au raisonnement.

Reste à prouver que l est un nombre merveilleux. Par construction, les termes de la suite (u_n) sont tous des carrés parfaits (ils sont tous entiers par récurrence triviale, et définis par récurrence comme des carrés de nombrs entiers). Par ailleurs, par définition, $u_n = a_n^{2^n} + 2$, et $u_n + 1 = b_n^{2^n} + 2$. L'encadrement $a_n < l < b_n$ implique alors que $u_n < l^{2^n} + 2 < u_n + 1$, ce qui prouve que $\lfloor l^{2^n} \rfloor + 2 = u_n$, qui est donc un carré parfait. Le nombre l est donc nécessairement merveilleux.

5. (a) On va à nouveau essayer de procéder par récurrence. Commençons au rang 1 : par définition, $v_1 = \lfloor \alpha^2 \rfloor + 2$. Or, on sait que $k < \alpha < k+1$, donc $k^2 < \alpha^2 < (k+1)^2$ puis $k^2 + 2 < \alpha^2 + 2 < (k+1)^2 + 2$. Mais on sait aussi que la partie entière de $\alpha^2 + 2$ est un carré parfait (puisque α est par hypothèse merveilleux). Cette partie entière est strictement supérieure à k^2 à cause de l'encadrement précédent, mais strictement inférieure à $(k+2)^2$ qui est est nettement supérieur à $(k+1)^2 + 2$. Elle ne peut donc valoir que $(k+1)^2$, c'est-à-dire u_1. On a donc prouvé que $v_1 = u_1$.

   Supposons désormais que $v_n = u_n$ pour un certain entier n. Alors $v_{n+1} = \lfloor \alpha^{2^{n+1}} \rfloor + 2$. Mais, par hypothèse de récurrence, $\lfloor \alpha^{2^n} \rfloor = v_n = u_n$, donc $u_n - 2 \leqslant \alpha^{2^n} < u_n - 1$, donc découle l'encadrement $(u_n - 2)^2 + 2 \leqslant v_{n+1} < (u_n - 1)^2 + 2$. On conclut comme pour le cas où $n = 1$. Comme v_{n+1} est un carré parfait, et qu'il est strictement supérieur à $(u_n - 2)^2$ et strictement inférieur à u_n^2, il est nécessairement égal à $(u_n - 1)^2$, ce qui prouve que $v_{n+1} = (u_n - 1)^2 = u_{n+1}$, et achève donc la récurrence.

   (b) C'est évident : par définition, $u_n - 2 = v_n - 2 \leqslant \alpha^{2^n} < u_n - 1$, on passe simplement au logarithme de base 2^n pour en déduire $a_n \leqslant \alpha < b_n$.

   (c) On peut brutaliser la question en factorisant : $y^{(2^n)} - x^{(2^n)} = (y-x) \times \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k y^{2^n-1-k}$.

   La somme fait intervenir 2^n termes qui sont tous supérieurs ou égaux à 1 à cause de l'hypothèse $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, donc $y^{(2^n)} - x^{(2^n)} \geqslant 2^n(y-x)$.

   (d) Une autre façon d'écrire la relation démontrée à la question précédente : $y - x \leqslant \dfrac{y^{(2^n)} - x^{(2^n)}}{2^n}$.

   On peut appliquer cette inégalité à $y = b_n$ et $x = a_n$ (ils vérifient bien $1 \leqslant a_n \leqslant b_n$) : par définition, $b_n^{(2^n)} - a_n^{(2^n)} = u_n - 1 - (u_n - 2) = 1$, donc $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. On en déduit via le théorème des gendarmes que $\lim b_n - a_n = 0$, donc que les limites de (a_n) est (b_n) (on a déjà prouvé leur convergence) sont égales. En notant l leur limite commune, l'encadrement $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ implique par passage à la limite que $l \leqslant \alpha \leqslant l$, donc que $l = \alpha$.

6. Les calculs précédents prouvent que a_n et b_n fournissent respectivement une valeur approchée par défaut et par excès de α à $\dfrac{1}{2^n}$ près. Si on choisit un entier n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-10}$, les nombres a_n et b_n fourniront donc tous les deux la valeur approchée souhaitée. Ici, $n = 34$ suffit (on sait que $2^{10} = 1\ 024 > 10^3$, donc $2^{34} > 10^9 \times 2^4 > 10^{10}$). Pour calculer a_{34}, on calcule par récurrences les 34 premiers termes de la suite (u_n), puis on affiche simplement la valeur de $a_{34} = (u_{34} - 2)^{\frac{1}{2^n}}$. Mais l'énorme problème c'est que les calculs correspondants sont en fait absolument monstrueux, et même avec la meilleure volonté du monde, Python n'arrive pas à les mener à terme. Du coup, je n'ai en fait pas de solution à proposer pour cette dernière question. Le programme suivant devrait calculer une valeur approchée du nombre merveilleux compris entre k et $k+1$, mais en pratique il ne tourne pas :

```
from math import log
def merveilleux(k) :
```

```
u=(k+1)**2
for i in range(2,35) :
        u=(u-1)**2
return (u-2)**(1/2**34)
```

Exercice 2 : de l'arithmétique sans intérêt (pléonasme).

1. On décompose d'abord 2 400 en facteurs premiers : $2\ 400 = 24 \times 100 = 2^3 \times 3 \times (2 \times 5)^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2$, donc $f(2\ 400) = 5^2 \times 2^5 = 800$.
2. Là encore, on commence par décomposer : $36^{36} = (2^2 \times 3^2)^{36} = 2^{72} \times 3^{72}$, donc $f(36^{36}) = 72^2 \times 72^3 = 72^5 = 1\ 934\ 917\ 632$. Si on continue, la décomposition en facteurs premiers de ce nombre est $(2^3 \times 3^2)^5 = 2^{15} \times 3^{10}$, donc $f^2(36^{36}) = 15^2 \times 10^3 = 225\ 000$. Ce nouveau nombre a pour décomposition en facteurs premiers $(3 \times 5)^2 \times (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^2 \times 5^5$, donc $f^3(36^{36}) = 3^2 \times 2^3 \times 5^5 = 225\ 000$. Bien entendu, les valeurs suivantes seront donc toutes égales à 225 000.
3. Par exemple, on peut prendre $n = 8 = 2^3$, qui a pour image $3^2 = 9$, qui a lui-même pour image $2^3 = 8$. En fait, tout nombre de la forme p^q, avec p et q tous les deux premiers mais distincts (sinon la suite est constante !), aura une suite de valeurs de période 2. Plus généralement, tout nombre qui est produit de tels nombres, avec des puissances qui sont deux à deux distinctes. Par exemple $n = 2^7 \times 5^{11} \times 13^{61}$ convient, puisqu'il a pour image $7^2 \times 11^5 \times 61^{13}$, qui redonnera une image égale à n. Les entiers convenables sont donc ceux qui ont des puissances apparaissant dans leur décomposition en facteurs premiers qui sont toutes différentes de 1 (sinon le facteur correspondant va disparaitre quand on calculera $f \circ f$), premières et distinctes (sinon on aura un regroupement de facteurs premiers dans le calcul de $f(n)$, par exemple si on a des facteurs 2^3 et 5^3, dans $f(n)$, les facteurs 3^5 et 3^2 se regrouperont en 3^7).
4. On aura $f(n) = 1$ si et seulement aucune puissance différente de 1 n'apparait dans la décomposition en facteurs premiers de n, donc si n est un produit de nombres premiers distincts. Par exemple $n = 2 \times 17 \times 61$ vérifie $f(n) = 1$. Pour avoir $f(n) = 2$, il faudrait n'avoir dans la décomposition de n que des puissances égales à 1, sauf une égale à 2. Mais comme cette dernière porterait nécessairement sur un facteur premier p, on aurait alors $f(n) = 2^p$, avec $p > 1$, donc on ne peut en fait jamais avoir $f(n) = 2$. Par le même raisonnement, on aura $f(n) = 4$ si et seulement si n est de la forme $4 \times n'$, où n' est un produit de nombres premiers distincts différents de 2, par exemple $n = 84 = 4 \times 3 \times 7$.
5. Commençons par prouver l'inégalité pour $n = 1$, autrement dit que $ab \leqslant a^b$ si a est un entier supérieur ou égal à 2. On peut le faire par récurrence sur l'entier b : pour $b = 0$, c'est trivial puisque $0 \leqslant 1$ est certainement vrai, et si on suppose $ab \leqslant a^b$ pour un entier b fixé, alors $a(b+1) = ab + a \leqslant a^b + a \leqslant a^b + a^b = 2a^b \leqslant a^{b+1}$, ce qui prouve l'hérédité.
   On effectue ensuite une deuxième récurrence sur le nombre k de couples d'entiers présents dans notre inégalité. Si $k = 1$, c'est le résultat préliminaire qu'on vient de prouver. Supposons donc l'inégalité vérifiée pour un k quelconque, alors on peut écrire, en exploitant l'hypothèse de récurrence et le cas particulier $k = 1$, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} a_i^{b_i} + a_{k+1} b_{k+1} \leqslant \prod_{i=1}^{k} a_i^{b_i} + a_{k+1}^{b_{k+1}}$.
   En notant $c = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} a_i^{b_i}$ et $d = a_{k+1}^{b_{k+1}}$, il suffit de prouver que $c + d \leqslant cd$ pour terminer la preuve de l'hérédité. Or, cette inégalité est toujours vraie pour des entiers supérieurs ou égaux à 1, par exemple car $cd - c - d = (c-1)(d-1) - 1 \geqslant 0$.
6. En partant de la décomposition en facteurs premiers de n, on écrit $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} q_i^{a_i}$, donc $f(n) =$

$\prod_{i=1}^{k} a_i^{q_i}$. Il faut alors décomposer chaque entier a_i en facteurs premiers pour pouvoir calculer $f(f(n))$. Écrivons par exemple $a_i = \prod_{j=1}^{r} p_j^{b_{i,j}}$ (en utilisant le même ensemble de nombres premiers pour écrire la décomposition de tous les entiers a_i, quitte à avoir des puissances $b_{i,j}$ nulles assez régulièrement). On peut alors calculer $f(n) = \prod_{j=1}^{r} p_j^{q_1 b_{1,j} + q_2 b_{2,j} + \cdots + q_k b_{k,j}}$ (on a simplement regroupé toutes les puissances de chaque facteur premier apparaissant dans chacun des termes de la forme $a_i^{q_i}$), puis $f(f(n)) = \prod_{j=1}^{r} (q_1 b_{1,j} + q_2 b_{2,j} + \cdots + q_k b_{k,j})^{p_j}$. On applique alors le résultats de la question précédente : $q_1 b_{1,j} + q_2 b_{2,j} + \cdots + q_k b_{k,j} \leqslant q_1^{b_{1,j}} q_2^{b_{2,j}} \dots q_k^{b_{k,j}}$, donc $f(f(n)) \leqslant q_1^{b_{1,1}p_1 + \cdots + b_{1,r}p_r} \times \cdots \times q_k^{b_{k,1}p_1 + \cdots + b_{k,r}p_r}$. Mais, en réutilisant encore la question précédente, $b_{1,1}p_1 + \cdots + b_{1,r}p_r \leqslant p_1^{b_{1,1}} \dots p_r^{b_{1,r}} = a_1$, et de même pour les autres exposants, on peut donc conclure que $f(f(n)) \leqslant q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_k^{a_k} = n$. La suite des valeurs $(f^{2i}(n))$ est donc une suite d'entiers naturels décroissante, elle stationne nécessairement à partir d'un certain rang.

7. (a) Si a est pair, c'est trivial en posant $\beta = 0$. Si a est impair au moins égal à 3, $a - 3$ est pair, et on prend simplement $\beta = 1$.

   (b) On écrit $n = q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k} = q_1^{2\alpha_1 + 3\beta_1} \dots q_k^{2\alpha_k + 3\beta_k}$ (en exploitant la question précédente), donc $n = (q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k})^2 \times (q_1^{\beta_1} \dots q_k^{\beta_k})^3$. Il suffit alors de poser $m = 2^{(q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k})} \times 3^{(q_1^{\beta_1} \dots q_k^{\beta_k})}$ pour constater que $f(m) = n$.

   (c) On commence par écrire $42^{42} = (2 \times 3 \times 7)^{42} = 2^{2\times 21} \times 3^{2\times 21} \times 7^{2\times 21} = (2^{21} \times 3^{21} \times 7^{21})^2 = (42^{21})^2$. On a donc un antécédent très simple (mais monstrueusement gros !) : $m = 2^{(42^{21})}$.

   (d) Cette dernière question est en fait complètement débile, l'image de n'importe quel entier par la fonction f est toujours un élément de A par construction...