Devoir Maison n^{o} 8

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 20 février 2023

Exercice 1 : à la découverte des nombres merveilleux.

Un réel positif x est **merveilleux** si, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lfloor x^{(2^n)} \rfloor + 2$ est un carré parfait (autrement dit, est le carré d'un entier naturel). Cette terminologie n'est pas standard, et certains d'entre vous reconnaitront d'ailleurs l'origine de cet exercice.

1. Vérifier que $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$ ne sont pas des réels merveilleux.
2. Montrer qu'il n'existe aucun réel merveilleux dans l'intervalle $[0, 1]$.
3. Montrer que, si x est merveilleux, x^2 est également merveilleux. En déduire que, s'il existe un réel merveilleux, alors il en existe une infinité.
4. Pour tout entier $k \geqslant 1$ fixé, on définit une suite (u_n) par récurrence en posant $u_1 = (k+1)^2$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 3.
   (b) Démontrer l'existence et l'unicité de deux suites de réels $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ telles que $u_n = 2 + a_n^{(2^n)} = 1 + b_n^{(2^n)}$.
   (c) Déterminer la monotonie des suites (a_n) et (b_n), puis prouver la convergence de ces deux suites.
   (d) Montrer que la limite l de la suite (a_n) est un nombre merveilleux appartenant l'intervalle $]k, k+1[$.
5. Soit α un réel merveilleux appartenant à l'intervalle $]k, k+1[$, avec $k \geqslant 1$ entier. On pose $v_n = \lfloor \alpha^{(2^n)} \rfloor + 2$.
   (a) Montrer que $v_n = u_n$.
   (b) Avec les notations de la question précédente, montrer que $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$.
   (c) Soient x et y deux réels tels que $1 \leqslant x \leqslant y$, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y^{(2^n)} - x^{(2^n)} \geqslant 2^n(y - x)$.
   (d) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers α, en déduire qu'il existe un unique réel merveilleux dans l'intervalle $]k, k+1[$.
6. Question bonus : écrire un programme Python calculant une valeur approchée à 10^{-10} près de l'unique réel merveilleux appartenant à l'intervalle $]42, 43[$.

Exercice 2 : de l'arithmétique sans intérêt (pléonasme).

Pour tout entier $n \geqslant 2$, ayant pour décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_k^{\alpha_k}$, on pose $f(n) = \alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \dots \alpha_k^{p_k}$. Ainsi, puisque $424\ 242 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 13 \times 37$, on a $f(424\ 242) = 1^2 \times 2^3 \times 2^7 \times 1^{13} \times 1^{37} = 2^{10} = 1\ 024$, puis $f(1\ 024) = 10^2 = 100$, et si on continue encore, $100 = 2^2 \times 5^2$, donc $f(100) = 2^7 = 128$. On notera par la suite f^i la composée de f i fois par elle-même (ainsi, les calculs précédents montrent que $f^2(424\ 242) = 100$, puis $f^3(424\ 242) = 128$).

1. Calculer $f(2\ 400)$ (en détaillant les calculs).
2. Déterminer la valeur de $f^i(36^{36})$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on dire des valeurs suivantes ?
3. Donner un exemple d'entier n pour lequel la suite $(f^i(n))$ est périodique de période 2 (mais pas constante). Caractériser de tels entiers.
4. Résoudre l'équation $f(n) = 1$, puis l'équation $f(n) = 2$ et enfin $f(n) = 4$.
5. Soient $(a_1, \dots, a_k)$ des entiers supérieurs ou égaux à 2, et $(b_1, \dots, b_k)$ des entiers naturels, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} a_i^{b_i}$.
6. Montrer qu'on a toujours $f(f(n)) \leqslant n$, en déduire que, pour tout entier n, on a l'égalité $f^{i+2}(n) = f^i(n)$ à partir d'un certain rang.
7. On note A l'ensemble des entiers n'ayant aucun exposant égal à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.
   (a) Montrer que tout entier $a \geqslant 2$ peut s'écrire sous la forme $2\alpha + 3\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$.
   (b) En déduire que tout élément de A admet un antécédent par f appartenant à A.
   (c) Donner un antécédent par f de 42^{42}.
   (d) Les images par f des éléments de A sont-elles toujours des éléments de A ?