Devoir Maison n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

26 janvier 2023

Problème : calcul différentiel sur les suites.

I. Opérateurs de décalage dans l'ensemble E.

1. Si on pose $u_n = 2$ pour tout entier naturel n, alors $v = g(u)$ reste constante égale à 2. Par contre, la suite $w = d(u)$ n'est pas égale à u, puisqu'elle vérifie $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = 2$. La suite reste tout de même stationnaire. Si on part d'une suite géométrique comme $u_n = 2^n$, $g(u)$ est toujours géométrique mais avec un premier terme modifié (ici, $(g(u))_n = 2^{n+1}$), alors que $d(u)$ n'est plus géométrique puisqu'elle vérifie $(d(u))_0 = 0$ (elle reste par ontre géométrique de raison 2 « à partir du rang 1 ».

2. On vient de voir que l'image par d d'une suite géométrique ne restait en général pas géométrique. Par contre, son image par g sera toujours géométrique de même raison : si $u_n = k \times q^n$, alors $(g(u))_n = (kq)q^n$. Pour une suite arithmétique, c'est exactement pareil. Prenons par exemple la suite arithmétique de raison 2 définie par $u_n = 2n - 42$. La suite $d(u)$ n'est plus arithmétique à cause d' ajout d'un terme nul en début de suite. Par contre, le fait de supprimer le premier terme conserve bien sûr une suite arithmétique de même raison (mais de premier terme décalé).

3. C'est complètement trivial : au rang 0 les relations $0 = 0+0$ et $0 = \lambda \times 0$ seront toujours vérifiées, et à partir du rang 1, on a simplement $(d(u+v))_n = u_{n+1} + v_{n+1}$ et $(d(\lambda u))_n = \lambda u_{n+1}$ par définition.

4. L'application g n'est pas injective : en effet, si on prend deux suites u et z ayant un premier terme différent mais qui coïncident ensuite, on aura $g(u) = g(z)$. Par exemple la suite z définie par $z_0 = 42$ et $\forall n \geqslant 1$, $z_n = 2$ a la même image par g que la suite constante égale à 2. Par contre, l'application g est surjective : si u est une suite quelconque, on peut poser $z_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $z_n = u_{n-1}$ et on aura $g(z) = d$, ce qui prouve que u admet toujours un antécédent (en fait on vient simplement de constater que $g(d(u)) = u$, et donc que $d(u)$ est toujours un antécédent de u par g).

   Inversement, l'application d est injective (si deux suites ont au moins un terme distinct, par exemple celui d'indice n, alors le terme d'indice $n+1$ se leur image par d sera aussi différent), mais pas surjective puisque, par construction, $d(u)$ est toujours une suite dont le premier terme est nul. N'importe quelle suite n'ayant pas un premier terme nul, par exemple la suite constante égale à 42, ne peut donc pas avoir d'antécédent par d.

5. On l'a déjà dit plus haut, $g(d(u)) = u$ pour toute suite u, donc $g \circ d = \text{id}$. On ne peut **rien** en déduire, et en particulier pas que les applications g et d, qui ne sont de toute façon pas bijectives, sont réciproques l'une de l'autre. Dans l'autre sens, $d(g(u))$ est la suite qui coïncide avec la suite u à partir du rang 1 mais qui a un premier terme nul (donc concrètement la suite obtenue à partir de u en remplaçant son terme d'indice 0 par 0).

6. L'application g^k décale vers la gauche de k unités les termes de la suite, en supprimant par la même occasion les k premiers termes de cette même suite. L'application d^k décale les termes de la suite de k unités vers la droite, en ajoutant k termes égaux à 0 en début de suite. La composée $g^k \circ d^l$ consiste à ajouter l zéros en décalant vers la droite, puis à revenir de k rangs vers la gauche. Si $k \geqslant l$, on a simplement $g^k \circ d^l = g^{k-l}$ puisque les 0 ajoutés initialement vont être supprimés ensuite. Par contre, si $k < l$, on aura $g^k \circ d^l = d^{l-k}$ (cette fois, on a conservé $l-k$ zéros en début de suite tout en décalant le reste). C'est plus intéressant dans l'autre sens : si $k \leqslant l$, on remplace les k premiers termes de la suite par des 0 et on décale les termes à partir de l'indice l de $l-k$ rangs vers la gauche. Par exemple, si $k = 2$ et $l = 4$, on obtiendra à l'arrivée la suite dont les premiers termes sont $(0, 0, u_4, u_5, u_6, \dots)$. Si $k > l$, on décale les l premiers termes de la suite pour les remplacer par des 0, et on décale les suivants de $k-l$ rangs vers la droite (en ajoutant encore des 0). Par exemple, si $k = 5$ et $l = 2$, on obtiendra comme début de suite $(0, 0, 0, 0, 0, u_2, u_3, \dots)$.

II. Dérivation de suites.

1. L'image de la suite constante égale à 2 est la suite nulle. Si $u_n = 2^n$, on aura $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$, donc $\Delta(u) = u$.
2. Si $\Delta(u) = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$, donc $u_{n+1} = u_n$. Les suites ayant une image nulle sont donc les suites constantes. En particulier, Δ ne peut pas être injective.
3. Par définition, on aura $v_k = u_{k+1} - u_k$ pour tout entier k, relation que l'on peut sommer pour k variant entre 0 et $n-1$ pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$. On en déduit que $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Si on part d'une suite v quelconque, on peut donc obtenir une suite u satisfaisant $\Delta(u) = v$ en posant simplement $u_0 = 0$ (ou n'importe quelle autre valeur), puis $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Toute suite admet donc un antécédent par l'application Δ, qui est surjective.
4. (a) C'est évidemment trivial : par définition, (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Les suites croissances sont donc celles ayant une dérivée positive, comme pour les fonctions.
   (b) Oui, il reste vrai, et c'est tout aussi trivial, on remplace simplement les inégalités larges par des inégalités strices.
5. (a) On le prouve par récurrence sur n : c'est vrai par hypothèse au rang 0. Supposons alors que, pour un certain entier n, on ait $u_n \leqslant v_n$. Comme de plus on a supposé $u_{n+1} - u_n \leqslant v_{n+1} - v_n$, on peut simplement additionner ces deux inégalités pour en déduire que $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$. On a donc bien $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier, autrement dit $\leqslant v$.
   (b) Si f et g sont deux fonctions dérivables telles que $f(0) \leqslant g(0)$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \leqslant g'(x)$, alors $f \leqslant g$ (résultat qui est tout à fait exact même si assez peu utile).
   (c) Calculons donc $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n) = n$. On a donc $(\Delta(a))_n = n$ et $a_0 = 0$. Le résultat de la question précédente prouve alors que toute suite vérifiant $u_0 \leqslant 0 = a_0$ et $(\Delta(u))_n \leqslant n = (\Delta(a))_n$ est telle que $u \leqslant a$. La réciproque est fausse : une suite telle que $u \leqslant a$ vérifie certainement $u_0 \leqslant a_0$, mais pas nécessairement $(\Delta(u))_n \leqslant n$. Par exemple la suite u nulle jusqu'au rang 42 et vérifiant $u_n = 100$ à partir de ce même rang 42 est majorée par a (puisque $a_{42} = 42 \times 21 - 21 = 21 \times 41 > 100$, mais on a $(\Delta(u))_{41} = 100 > 41$.
6. Un calcul très simple au rang n suffit : $(\Delta(u \times v))_n = u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n$, et $(\Delta(u))_n \times (g(v))_n + u_n \times (\Delta(v))_n = (un + 1 - u_n)v_{n+1} + u_n(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1}v_n - u_n v_n$, ce qui proue la formule. On pense bien sûr beaucoup à la formule de dérivation d'un produit.
7. En posant $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors $(\Delta^2(u))_n = v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$. On procède bien sûr par récurrence pour la formule générale, qui est trivialement vérifiée pour $p = 0$ (l'unique terme restant dans la somme est alors égal à u_n). Supposons la formule vraie au rang p, alors $(\Delta^{p+1}(u))_n = (\Delta^p(u))_{n+1} - (\Delta^p(u))_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^{p-k}u_{n+1+k} - \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^{p-k}u_{n+k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^{p-k}u_{n+1+k} - \sum_{k=-1}^{p-1} \binom{p}{k+1}(-1)^{p-k-1}u_{n+1+k}$. On isole le dernier terme de la première somme (qui vaut simplement u_{n+p+1}) et le premier de la deuxième (qui vaut simplement $(-1)^p u_n$), et on regroupe les deux en utilisant le fait que $(-1)^{p-k-1}$ est simplement l'opposé de $(-1)^{p-k}$, ce qui donne $u_{n+1+p} + (-1)^{p+1}u_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \left(\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1}\right)(-1)^{p-k}u_{n+1+k}$.

   On applique la relation de Pascal, notre somme devient alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k+1}(-1)^{p-k}u_{n+1+k}$ $= \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k}(-1)^{p+1-k}u_{n+k}$. Il ne reste plus qu'à réinsérer dans cette somme le u_{n+1+p} qui correspond à la formule pour $k = p+1$ et $(-1)^{p+1}u_n$ (qui sera le terme numéro 0) pour obtenir exactement la formule souhaitée au rang $n+1$.

8. On calcule sans beaucoup se fatiguer que la dérivée de la première suite est constante égale à 1 (comme pour les fonctions), celle de n^2 vaut $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ (ce qui est légèrement différent de ce qu'on a pour les fonctions) alors que la dérivée de $n(n+1)$ donne $(n+1)(n+2) - n(n+1) = (n+1)(n+2-n) = 2(n+1)$. Autrement dit, la dérivée de la suite définie par $u_n = n(n-1)$ serait $2n$ (on se demande bien pourquoi l'énoncé a mis un $+$ au lieu du $-$). Enfin, la dérivée de n^3 donne $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ (on s'éloigne de plus en plus de la formule pour les fonctions) alors que celle de $n(n+1)(n+2)$ vaut $(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) = 3(n+1)(n+2)$. Pour le coup, il faudrait trafiquer un peu plus pour obtenir une suite de dérivées $3n^2$. On peut facilement conjecturer que la dérivée de $n(n+1)\dots(n+k)$ sera toujours égale à $k(n+1)(n+2)\dots(n+k)$.

III. Primitives de suites.

1. On l'a déjà démontré à la question $II.3$ en prouvant que Δ est surjective.
2. Si U et V sont deux primitives de u, alors la linéarité de Δ prouve que $\Delta(U-V) = u-u = 0$, donc que $U-V$ est une suite constante (on peut aussi reprendre les formules explicites de la question $II.3$, seule la valeur du terme initial sera modifiée, ensuite on lui ajoute les mêmes sommes). C'est le même résultat que pour les fonctions.
3. (a) On calcule simplement $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$ après simplification des sommes.

   (b) La formule du binôme de Newton permet d'affirmer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k}$ $\displaystyle= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 1^{n+1-k} = (-1+1)^{n+1} = 0$. Comme le premier terme de cette somme est égal à -1, l'égalité demandée en découle.

   (c) On calcule donc $\displaystyle S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}$ en isolant le dernier terme dans la première somme et en appliquant la relation de Pascal « à l'envers » pour simplifier la différence de coefficients binômiaux. Or, $\displaystyle\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$ d'après la formule sans nom (qu'on utilise là aussi un peu à l'envers !). On peut donc écrire $\displaystyle S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}$ à l'aide du résultat de la question précédente.

   (d) Les suites (H_n) et (S_n) ayant la même dérivée et vérifiant $H_0 = S_0 = 0$ (ou $H_1 = S_1 = 1$ si on préfère), elles sont égales. On a donc, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Par exemple pour $n=4$, $\displaystyle\binom{4}{1} - \frac{1}{2}\binom{4}{2} + \frac{1}{3}\binom{4}{3} - \frac{1}{4}\binom{4}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. En effet, le membre de droite est égal à $\dfrac{25}{12}$ et celui de gauche à $\displaystyle 4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.
4. Pour $u_n = n$, on sait déjà que $\dfrac{n(n-1)}{2}$ convient. Pour les autres, on utilise la formule explicite de la question $II.3$. Ainsi, pour $u_n = n^2$, on calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, et pour $u_n = n^3$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4}$. Mêmes calculs pour les autres suites : pour $u_n = n(n+1)$, on calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1+3}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
   Un dernier calcul pour la route : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^3 + 3k^2 + 2k = \frac{(n-1)^2n^2}{4} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(n-1)(n^2-n+4n-2+4)}{4} = \frac{(n-1)n(n^2+3n+2)}{4} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$. On peut encore une fois généraliser assez facilement les résultats obtenus.