Devoir Maison n^{o} 7

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 26 janvier 2023

Problème : calcul différentiel sur les suites.

Le but de ce problème est d'adapter aux suites les outils de calculs différentiel classiques dans le cadre des fonctions, et notamment les notions de dérivée et de primitive. On notera dans cet énoncé E l'ensemble de toutes les suites réelles, et on désignera souvent par u (plutôt que (u_n)) un élément de E pour alléger les notations, notamment quand on va définir des applications sur l'ensemble E.

I. Opérateurs de décalage dans l'ensemble E.

On définit dans cette première partie deux opérateurs (applications) sur l'ensemble E. L'opérateur de décalage à gauche est défini par $g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & v \end{array} \right.$, où la suite $v = g(u)$ est définie de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$. On définit de façon similaire un décalage à droite noté d en posant $d(u) = w$, où la suite (w_n) est définie par $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = u_{n-1}$.

1. Quelle sont les images par les applications g et d de la suite constante égale à 2 ? De la suite géométrique définie par $u_n = 2^n$?
2. L'image d'une suite géométrique par g et d est-elle toujours une suite géométrique ? Même question pour une suite arithmétique.
3. Montrer que d est une application linéaire, c'est-à-dire que :
   - $\forall (u, v) \in E^2$, $d(u + v) = d(u) + d(v)$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $d(\lambda u) = \lambda d(u)$.
4. Les applications g et d sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? On justifiera bien entendu chaque réponse proposée.
5. Que vaut l'application composée $g \circ d$? Que peut-on en déduire sur g et d ? Calculer également $d \circ g$.
6. On note $g^2 = g \circ g$, puis plus généralement g^k la composée de g par elle-même k fois de suite (k étant un entier supérieur ou égal à 1). On définit de même les composées successives d^k. Décrire simplement « en français » l'effet des applications g^k et d^k sur une suite u. Que valent les composées $g^k \circ d^l$ et $d^k \circ g^l$ (avec $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$) ?

II. Dérivation de suites.

On définit désormais sur E un opérateur de dérivation $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & v \end{array} \right.$, où la suite v est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Autrement dit, pour faire plus savant, $\Delta = g - \mathrm{id}_E$. On définit, pour tout entier naturel k, Δ^k de façon similaire à la question 6 de la première partie (par convention, on pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_E$).

1. Calculer l'image par Δ de la suite constante égale à 2, ainsi que de la suite géométrique définie par $u_n = 2^n$.
2. Déterminer toutes les suites ayant une image nulle par Δ. L'application Δ est-elle injective ?
3. En supposant que $\Delta(u) = v$, exprimer en exploitant une somme télescopique u_n en fonction de u_0 et des termes de la suite v. L'application Δ est-elle surjective ?
4. (a) Montrer qu'une suite u est croissante si et seulement si $\Delta(u)$ est une suite positive. Quel résultat classique sur la dérivation des fonctions vient-on de démontrer sur les suites ?

   (b) Le résultat précédent (pour les suites !) reste-t-il vrai en remplaçant les mots « croissante » et « positive » par « strictement croissante » et « strictement positive » ? Bien sûr, on attend une démonstration si la réponse est oui, un contre-exemple si la réponse est non.

5. (a) Soient u et v deux suites vérifiant $\Delta(u) \leqslant \Delta(v)$ (qui signifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta(u))_n \leqslant (\Delta(v))_n$) et $u_0 \leqslant v_0$. Montrer que $u \leqslant v$.
   (b) Énoncer un résultat similaire sur les fonctions (sans le démontrer).
   (c) On note a la suite définie par $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Calculer $\Delta(a)$, et en déduire que tout suite vérifiant $u_0 \leqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta(u))_n \leqslant 0$ satisfait nécessairement l'inégalité $u \leqslant a$. La réciproque est-elle vraie ?
6. Démontrer la formule $\forall (u,v) \in E^2$, $\Delta(u \times v) = (\Delta u) \times g(v) + u \times \Delta(v)$. À quelle formule classique sur les fonctions vous fait-elle penser ?
7. Montrer que la suite $\Delta^2(u)$ est définie par $(\Delta^2(u))_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, puis plus généralement que, pour tout entier naturel p, $(\Delta^p(u))_n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}$.
8. Calculer la dérivée des suites définies par $u_n = n$, $u_n = n^2$, $u_n = n^3$, puis $u_n = n(n+1)$ et $u_n = n(n+1)(n+2)$. Commenter les résultats obtenus (en essayant notamment de comparer avec les formules bien connues pour les dérivées des fonctions correspondantes). Si vous êtes courageux, proposer une généralisation.

III. Primitives de suites.

On appelle primitive de la suite u toute suite U vérifiant $\Delta(U) = u$.

1. Montrer que toute suite réelle admet des primitives.
2. Que peut-on dire de deux primitives d'une même suite (réponse à justifier) ?
3. On définit pour cette question la suite h par $h_n = \frac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (avec, par convention, $H_0 = 0$).
   (a) Montrer que H est une primitive de la suite h.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = -1$.
   (c) En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$, montrer que S est une primitive de h.
   (d) Quelle formule amusante peut-on déduire des dernières questions ? Écrire explicitement cette formule pour $n = 4$.
4. Déterminer une primitive des suites définies par $u_n = n$, $u_n = n^2$, $u_n = n^3$ puis $u_n = n(n+1)$ et $u_n = n(n+1)(n+2)$. Commenter une nouvelle fois les résultats obtenus.