Devoir Maison n$^{\mathrm{o}}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 janvier 2023

Énigme 1.

En notant R le rayon de la Terre (en mètres), les rennes parcourent donc habituellement $2\pi\times(R+1000)$ mètres, et devront en faire $2\pi \times (R + 2000)$ le jour où ils changent leur altitude, ce qui représente un rab de 2π kilomètres, soit (au millimètre près), 6.283 185 kilomètres en plus. Vous noterez en passant que le nombre de kilomètres ajoutés dépend uniquement de la différence d'altitude entre les deux trajectoires, et absolument pas du rayon de la Terre.

Énigme 2.

Une méthode barbare consiste à calculer $u_4 = 6$, $u_5 = 9$, $u_6 = 18$, $u_7 = 27$, puis à en avoir marre et à conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2 \times 3^{n-1}$ et $u_{2n+1} = 3^n$. On peut même le démontrer par récurrence triple : $u_1 = 1 = \times 3^0$, $u_2 = 2 = 2 \times 3^0$, $u_3 = 3 = 3^1$, ce qui effectue l'initialisation triple. Supposons ensuite la formule vraie pour u_n, u_{n+1} et u_{n+2}. Il faut distinguer deux cas : si n est pair égal à $2p$, on a donc $u_n = 2\times 3^{p-1}$, $u_{n+1} = 3^p$ et $u_{n+2} = 2\times 3^p$, donc $u_{n+3} = \dfrac{2 \times 3^{2p}}{2 \times 3^{p-1}} = 3^{p+1}$, ce qui est bien la formule attendue. Si n est impair égal à $2p + 1$, on a cette fois $u_n = 3^p$, $u_{n+1} = 2 \times 3^p$ et $u_{n+2} = 3^{p+1}$, donc $u_{n+3}\dfrac{2 \times 3^{2p+1}}{3^p} = 2 \times 3^{p+1}$, ce qui est à nouveau la formule correcte. Nos formules sont donc prouvées, et on peut calculer la somme des 24 premiers termes de la suite, en regroupant les termes d'indice imapir avec le terme d'indice pair qui suit pour simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} u_k = \sum_{j=0}^{11} 3^j + 2 \times 3^j = \sum_{j=0}^{11} 3^{j+1} = 3 \times \frac{1-3^{12}}{1-3} = \frac{3}{2}(3^{12} - 1) = 797\ 160$. Ce n'est a priori pas tout à fait suffisant pour nourrir la métropole bordelaise (un peu plus de 800 000 habitants).

Énigme 3.

Il est évident qu'on ne verra qu'un seul sapin sur la ligne numéro 0 (en notant $(0, 0)$ les coordonnées de l'acheteur, on verra toujours le sapin $(1, 0)$ et ce dernier cachera tous les suivants), et un seul sur la première colonne (le sapin $(0, 1)$). Sur les autres lignes et colonnes, il est en fait facile de se convaincre que le sapin placé aux coordonnées (i, j) est visible si et seulement si la fraction $\dfrac{i}{j}$ est irréductible (sinon, on peut écrire $\dfrac{i}{j} = \dfrac{i'}{j'}$, avec $i' < i$ et $j' < j$, et le sapin (i', j') bouchera la vue du sapin (i, j)). Les coordonnées des emplacements de sapins étant numérotées jusqu'à $(n - 1, p - 1)$, on verra donc, en plus des deux déjà signalés, $n - 1$ sapins sur la ligne numéro 1 (on les voit tous), puis $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ sur la ligne numéro 2 (on en voit un sur deux), puis $\left\lfloor \dfrac{2n}{3} \right\rfloor$ sur la ligne numéro 3 (on en voit deux sur trois, je vous laisse vérifier que la formule que je propose est toujours correcte), puis $\left\lfloor \dfrac{3n}{4} \right\rfloor$ sur la ligne numéro 4, et ainsi de suite. Au total, on aura donc un nombre de sapins visible égal à $1 + n + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \dfrac{(p-2)n}{p-1} \right\rfloor$. Sans chercher à aller beaucoup plus loin, on peut trouver à la main les valeurs de n donnant une somme égale à 42 en fonction des valeurs prises par p :

- si $p = 1$, on ne verra jamais plus d'un sapin, donc c'est mort.
- si $p = 2$, il faut avoir $1 + n = 42$, donc $n = 41$. Symétriquement, ça marche aussi si $n = 2$ et $p = 42$, bien entendu.

- si $p = 3$, on veut $1 + n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 42$, ce qui ne se produit jamais (cette expression est clairement croissante, et elle prend la veleur 41 pour $n = 27$ et 43 pour $n = 28$).
- si $p = 4$, il faudrait $1 + n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = 42$, ce qui ne se produit pas non plus (pour $n = 19$, l'expression vaut 41 et elle passe carrément à 44 pour $n = 20$).
- si $p = 5$, il faut $1+n+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 42$. En majorant les parties entières par la valeur à l'intérieur de la partie entière, on doit donc avoir $1 + n + \frac{n}{2} + \frac{2n}{3} + \frac{3n}{4} \leqslant 42$, donc $1 + \frac{35}{12}n \leqslant 42$, donc $n \leqslant 14$. On vise dans ces eaux-là : pour $n = 14$, l'expression vaut 41 (comme d'habitude quoi), et pour $n = 15$ on monte à 44, encore raté.
- si $p = 6$, le même raisonnement que ci-dessus pousse à tenter $n = 11$, qui donne seulement 40 sapins visibles, et on passe à 45 pour $n = 12$.
- si $p = 7$, on teste $n = 9$ qui donne 40 sapins visibles, on en aura à nouveau trop pour $n = 10$.
- si $p = 8$, on va seulement tester $n = 8$. Miracle, on trouve alors 42 sapins visible !
- pas la peine d'aller plus loi, la symétrie du problème fait qu'on ne peut pas trouver de couple (p, n) avec $p > n$ si on on n'en a pas trouvé avec $n < p$.

En plus des deux solutions débiles, la seule possibilité est donc d'avoir $n = p = 8$.

Énigme 4.

Si on considère tous les tirages possibles, il y en a $8! = 40\ 320$ (le nombre de permutations de l'ensemble à huit éléments constitué par les huit rennes), mais il faut évidemment supprimer tous les cas où un renne a tiré son propre nom. Plutôt que d'essayer de compter directement le nombre de ces permutations (ce qu'on appelle des permutations sans point fixe, il existe une formule générale mais elle n'est pas si simple à prouver), on va séparer des cas selon la longueur des cycles créés (on appellera cycle un bout de permutations faisant intervenir des rennes qui auront leur cadeau le même jour). On a les possibilités suivantes :

- un seul cycle contenant les huit rennes (dans ce cas, tout le monde aura son cadeau le premier jour). Il y a $7! = 5\ 040$ tels cycles (on a 7 choix possibles pour le renne qui reçoit le cadeau de Comète, puis 6 pour celui qui reçoit le cadeau de ce dernier (qui ne doit pas être Comète), et ainsi de suite). De façon générale, le nombre de façons de créer un cycle de longueur k sur k rennes fixés sera toujours $(k - 1)!$.
- un cycle de six rennes et un autre de deux rennes (les cadeaux seront distribués en deux jours). Il faut choisir les deux rennes qui s'échangeront leur cadeau, ce qui se fait de $\binom{8}{2} = 28$ façons, et choisir l'ordre pour le cycle des six rennes restants, ce qui laisse $5!$ possibilités (cf remarque faite pour le premier cas). Au total, on a donc $28 \times 120 = 3\ 360$ telles possibilités.
- un cycle de cinq rennes et un autre de trois rennes (encore une fois, la distribution prendra deux jours). Il faut choisir trois rennes, de $\binom{8}{3} = 56$ façons, choisir leur permutation (seulement $2! = 2$ possibilités), et la permutation des cinq rennes restants ($4! = 24$ possibilités), pour au total $56 \times 2 \times 24 = 2\ 688$ cas possibles.
- deux cycles de quatre rennes chacun (encore deux jours de distribution). On choisit les quatre rennes du premier cycle, mais attention, il faudra ensuite diviser par deux, car le cas où on choisit les quatre autres rennes pour le premier cycle est en fait le même (un piège assez vicieux dans ce genre de calculs). Cela fait donc $\frac{1}{2} \times \binom{8}{4} = 35$ possibités. Ensuite, il faut par contre multiplier deux fois par $3! = 6$, ce qui fait donc au total $35 \times 6^2 = 1\ 260$ possibilités.
- un cycle de quatre rennes et deux cycles de deux rennes (trois jours de distribution). On choisit deux rennes (28 façons), deux autres rennes parmi ceux qui restent (15 possibilités), diviser par deux (même raison que ci-dessus), et choisir le cycle pour les quatre derniers rennes (6 possbilités), soit au total $14 \times 15 \times 6 = 1\ 260$ cas.
- deux cycles de trois rennes et un cycle de deux rennes (trois jours de distribution). On choisit trois rennes (56 possibilités), on en choisit trois parmi les cinq restants (10 possibilités), on divise encore une fois par deux, en on a deux fois 2 possibilités pour les cycles de trois rennes, ce qui donne 1 120 possibilités au total.

- quatre cycles de deux rennes chacun (seule possibilité pour avoir quatre jours de distribution). On peut compter celles-là par un raisonnement direct : il y a 7 choix possibles pour le renne échangeant son cadeau avec Comète, puis 5 pour celui échangeant son cadeau avec le premier renne restant dans l'ordre alphabétique (on a déjà éliminé deux rennes), ensuite trois choix pour le copain du premier des quatre rennes restants, et plus de choix pour le dernier « couple », ce qui fait $7 \times 5 \times 3 = 105$ cas seulement.

Faisons les comptes : on a donc 5 040 cas où la distribution se fait en un jour, 7 308 cas où la distribution prend deux jours, 2 380 cas où la distribution prend trois jours, et donc 105 cas de distribution en quatre jours. Au total, cela fait 14 833 cas (moins de 40% du nombre total de permutations disponibles donc). La probabilité d'avoir une distribution en seul jour vaut $\frac{5\ 040}{14\ 833} = \frac{720}{2\ 119} \simeq 0.34$ (en gros un tiers des cas donc). Pour le nombre moyen de jours de distribution, on fait une moyenne pondérée : $\frac{5\ 040 + 2 \times 7\ 308 + 3 \times 2\ 380 + 4 \times 105}{14\ 833} = \frac{3\ 888}{2\ 119} \simeq 1.83$ jours.

Énigme 5.

C'est effectivement complètement trivial : le père Noël a 31 ans (pas vieux finalement le barbu), et le polynôme est $-5X^2 + 274X - 3\ 689$.