

Devoir Maison n° 6 : Joyeux Noël

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 3 janvier 2023

Comme chaque année, alors que nous commençons à avoir trouvé un bon rythme de croisière qui aurait du nous permettre de démontrer la conjecture de Riemann en quelques semaines, notre belle progression est stoppée net par la tradition des « fêtes de fin d'année » qui oblige les pauvres élèves de MPSI à faire semblant d'être heureux de recevoir des cadeaux pourris et de picoler un peu trop le 31 décembre, alors qu'ils seraient bien sûr nettement plus contents avec une triple dose d'exercices de maths. Pour vous consoler un peu, votre prof de maths préféré (heureusement, vous n'en avez qu'un, je ne prends pas trop de risques) a lui aussi prévu une petite série de cadeaux, et il vous les distribue même avec quelques jours d'avance sur le gros barbu (qui ne devrait pas trop risquer de se crâmer les fesses en descendant dans les cheminées cette année puisqu'on n'a plus le droit de les allumer pour cause de sobriété énergétique, à mon avis les gens se réchaufferont en étant justement sobres uniquement du point de vue énergétique). Bref, quelques friandises mathématiques pour s'amuser un peu en attendant 2023, passez quand même de bonnes fêtes et revenez en forme le ~~2 janvier~~ 3 janvier (quoi, on nous boulotte un jour de plus ? Scandale!).

Énigme 1 : l'entraînement des rennes.

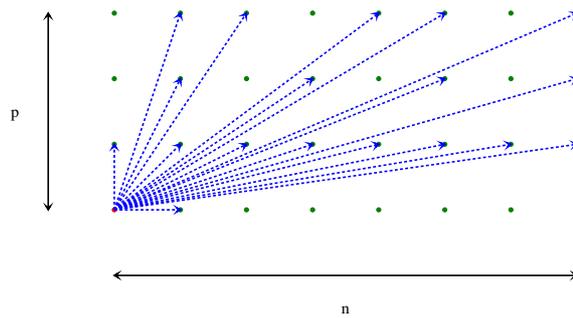
Pour ne pas perdre la forme, tous les jours de l'année, les rennes du père Noël font un petit footing matinal (même si je ne sais pas si le terme de footing est vraiment adapté pour des rennes volants), en faisant tout simplement le tour de la Terre (au niveau de l'Équateur), à une altitude de 1 000 m. Un beau jour, ils sont toutefois obligés de changer leur plan car une concentration d'avions volant eux aussi à 1 000 m d'altitude doit croiser leur route, créant le risque d'un tragique accident. Ils décident donc exceptionnellement d'allonger leur footing en faisant leur tour de Terre à 2 000 m d'altitude. Quelle distance supplémentaire vont-ils devoir parcourir par rapport à leur tour habituel (la réponse sera donnée au millimètre près) ?

Énigme 2 : le calendrier de l'Avent.

Le père Noël, qui est comme chacun sait un gros gourmand, s'est prévu pour se motiver cette année un calendrier de l'avent un peu spécial. Le 1er décembre, il a droit à un chocolat, le 2 décembre à deux chocolats, le 3 décembre à trois chocolats. Bon, vous avez deviné la suite ? Vous avez tort, pour les jours qui suivent, en posant u_n le nombre de chocolats prévus pour le jour n , on aura $u_{n+3} = \frac{u_{n+2} \times u_{n+1}}{u_n}$ (vous ne saviez pas que le père Noël aimait les maths, hein ?). Le nombre total de chocolats engloutis par le père Noël sera-t-il supérieur au nombre d'habitants de la métropole bordelaise (le calendrier s'arrête bien entendu au 24 décembre) ?

Énigme 3 : le vendeur de sapins.

Un vendeur de sapins a disposé ses arbres bien régulièrement sur un rectangle de $n \times p$ sapins (les points verts sur l'illustration ci-dessous sont les sapins), laissant uniquement un emplacement vide dans un coin sur lequel l'acheteur (matérialisé par le point rouge) s'est placé pour admirer les sapins en vente. Mais bien sûr, l'acheteur ne voit pas tous les sapins puisque certains en cachent d'autres. Sur mon illustration, avec $n = 8$ et $p = 4$, il voit exactement 18 sapins (au bout des 18 flèches bleues). Existe-t-il des valeurs de n et de p pour lesquelles l'acheteur verra exactement 42 sapins ? Si oui, lesquelles ?



Énigme 4 : le père Noël secret des rennes.

Les huit rennes du père Noël (Comète, Cupidon, Danseuse, Éclair, Fringant, Furie, Tonnerre et Tornade) ont eux aussi organisé leur père Noël secret. Ils ont donc chacun pioché le nom d'un de leurs camarades pour lui faire un cadeau (bien sûr, si l'un des rennes pioche son propre nom, le tirage n'est pas valable et on recommence). Mais pour faire durer un peu plus le plaisir, ils décident que la remise des cadeaux va être faite en plusieurs phases : le premier jour, Comète (le premier dans l'ordre alphabétique) donne son cadeau au renne qu'il a pioché, qui lui même donne son cadeau, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait bouclé jusqu'à Comète (ainsi, si Comète a tiré Fringant, que Fringant a tiré Tonnerre et que Tonnerre a tiré Comète, seuls trois rennes auront un cadeau le premier jour). Si tous les rennes n'ont pas encore eu leur cadeau, on reprendra le lendemain suivant le même principe à partir du premier renne (dans l'ordre alphabétique) n'ayant pas encore eu de cadeau. Quelle est la probabilité exacte que tous les rennes reçoivent leur cadeau dès le premier jour ? En moyenne, combien faudra-t-il de jours pour distribuer tous les cadeaux ? Les plus ~~mascuistes~~ motivés d'entre vous pourront tenter de refaire l'énigme avec une classe de 46 élèves, mais il leur faudra des connaissances solides en dénombrement pour s'en sortir...

Énigme 5 : l'âge du père Noël (le retour).

Évariste, qui est un petit garçon très curieux, décide un beau jour d'appeler le père Noël sur son portable (bah oui, en 2022, le père Noël a bien le droit d'avoir un portable, non ?) pour lui demander son âge. S'ensuit cette drôle de conversation :

- Évariste : Bonjour, père Noël, je m'appelle Évariste, et à part un ou deux lancers de chiffons, j'ai été très sage cette année.
- Père Noël : Bonjour, Évariste, que souhaites-tu comme cadeau pour ton Noël ?
- Évariste : Oh, t'inquiètes pas pour ça, grand-père, j'ai déjà commandé **Algebraic geometry** d'Hartshorne sur la boutique en ligne de Springer. Si je t'appelle, c'était juste pour savoir quel âge tu as ?
- Père Noël : Oh mais jeune homme, c'est un peu indiscret comme question, ça ! Mais comme tu as été sage et que tu aimes bien les maths, je te donne un indice : mon âge est un entier racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients entiers.
- Évariste : Me prends pas pour un élève de maternelle, papy, je vois très bien que c'est pas suffisant comme indice ! Quel est l'image de 28 par ton polynôme ?
- Père Noël : L'image de 28 est 63, et je n'ai donc pas 28 ans. Mais comme ça ne va pas te suffire, tu peux me demander une autre image.
- Évariste : Ok, quelle est l'image de $skfrzlkzlkz^1$?
- Père Noël : L'image de ce nombre est 52, mais je suis moins jeune que tu ne sembles le croire !
- Évariste : Ok, donc tu as $swxkfz^2$ ans.
- Père Noël : Bien joué petit, j'ai l'impression que tu as de l'avenir dans le domaine des maths.
- Évariste : Pfff, c'était complètement trivial !

Et vous, savez-vous quel âge a le père Noël ? Et quel est le polynôme dont il est question dans cette discussion ?

1. Un peu de friture sur la ligne hélas, mais je peux vous affirmer qu'Évariste a demandé l'image d'un deuxième entier qui est plus grand que 28
 2. décidément, la 5G au pôle Nord c'est pas encore ça...