Devoir Maison n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 décembre 2022

Problème : autour de l'angle $\dfrac{2\pi}{7}$.

A. Un exercice de colle classique.

1. Bien entendu, $a^7 = e^{2i\pi} = 1$. De plus, a est un nomnbre complexe de module 1, donc $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.
2. Comme $a^7 = 1$, on peut affirmer que $a^6 = \dfrac{1}{a} = \overline{a}$, $a^5 = \dfrac{1}{a^2} = (\overline{a})^2 = \overline{a^2}$, et $a^3 = \dfrac{1}{a^4} = \overline{a^4}$. On en déduit immédiatement que $T = \overline{a^4 + a^2 + a} = \overline{S}$. La partie imaginaire de S est égale à $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$. Les deux premiers sinus sont positifs, et $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, qui est inférieur en valeur absolue aux deux sinus positifs de notre somme, donc $\text{Im}(S) > 0$. Comme $T = \overline{S}$, on en déduit que $\text{Im}(T) < 0$.
3. On a bien entendu constaté depuis le début de l'exercice que a était la « première » racine septième de l'unité, et donc que ces mêmes racines septièmes sont les nombres a^k, avec $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Or, $S+T = a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} a^k - 1$. Comme on sait que la somme des racines septièmes de l'unité est nulle (c'est du cours), on en déduit que $S+T = -1$. Pour le produit, on effectue un calcul bourrin, puis on simplifie ce qu'on peut en exploitant le fait que $a^7 = 1$: $S \times T = a^4+a^6+a^7+a^5+a^7+a^8+a^7+a^9+a^{10} = a^4+a^6+1+a^5+1+a+1+a^2+a^3 = 3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{6} a^k = 3 - 1 = 2$.
4. Les nombres S et T sont donc solutions de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 8 = -7$, et admet donc deux racines complexes conjuguées. Celle qui a la partie imaginaire positive est nécessairement égale à S, donc $S = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$.

B. Quelques applications plus ou moins passionnantes.

1. Ces deux calculs correspondent exactement à la partie réelle et à la partie imaginaire de S, donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = -\dfrac{1}{2}$, et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
2. (a) Il s'agit d'une somme géométrique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (-a^2)^k = \sum_{k=0}^{6} (-a^2)^k - 1 = \frac{1 - (-a^2)^7}{1 + a^2} - 1 = \frac{1+1}{1+a^2} - 1 = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{1 - e^{i\frac{4\pi}{7}}}{1 + e^{i\frac{4\pi}{7}}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{7}}(e^{-i\frac{2\pi}{7}} - e^{i\frac{2\pi}{7}})}{e^{i\frac{2\pi}{7}}(e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{2\pi}{7}})} = \frac{-2i\sin(\frac{2\pi}{7})}{2\cos(\frac{2\pi}{7})} = -i\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

   (b) Encore un peu de factorisation par l'angle moitié : $2(e^{i\frac{4\pi}{7}} - e^{i\frac{10\pi}{7}}) = 2e^{i\frac{7\pi}{7}}(e^{-i\frac{3\pi}{7}} - e^{i\frac{3\pi}{7}}) = 4i\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$. Ne reste plus qu'à constater que $\dfrac{4\pi}{7} = \pi - \dfrac{3\pi}{7}$ pour conclure.

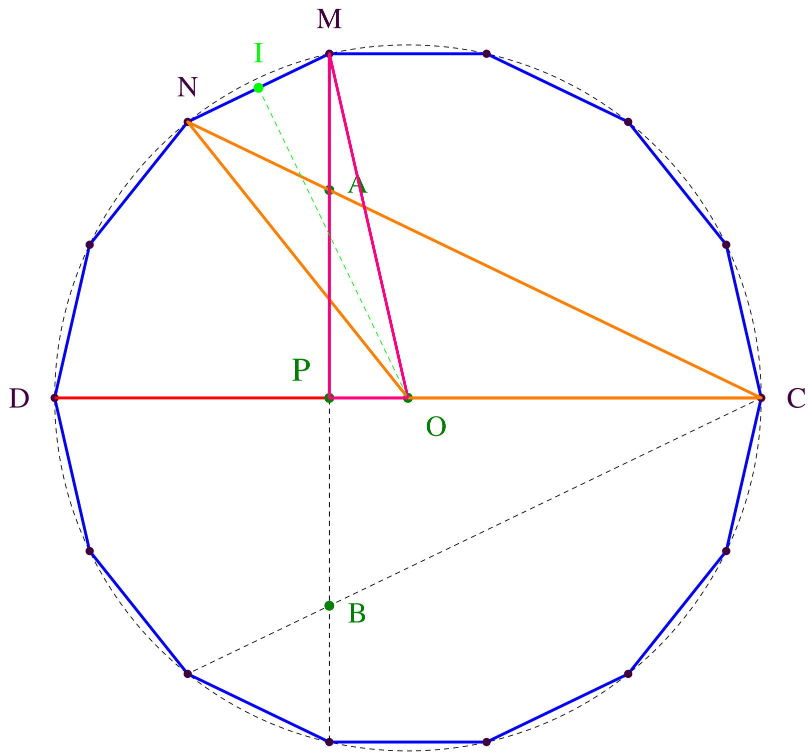
(c) La somme calculée en question a vaut $-a^2+a^4-a^6+a-a^3+a^5$ (en utilisant comme d'habitude le fait que $a^7=1$), donc $2(a^2-a^5)+\sum_{k=1}^{6}(-a^2)^k = a^2+a^4-a^6+a-a^3-a^5 = S-T = i\sqrt{7}$. On déduit des calculs précédents que $4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\sqrt{7}$.

3. (a) On utilise trois formules de duplication du sinus successives pour obtenir $8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$
$= 2\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$
(on a utilisé deux fois en cours de route l'égalité classique $\sin(\pi-x)=\sin(x)$). L'égalité demandée en découle immédiatement, et on en déduit $8P=1$, donc $P=\frac{1}{8}$ (le produit Π ne pouvant être nul).

(b) Les « linéarisations » demandées ici sont de simples formules de transformation somme-produit : $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$, puis $4\Pi = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ (même pas besoin de transformation somme-produit pour le premier produit ici, puisque c'est une formule de duplication de sinus). Il ne reste plus qu'à constater que $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ pour obtenir la formule de l'énoncé. Comme par ailleurs $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=-\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$, on a donc $4\Pi=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}$ (cf question 1), donc $\pi=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

C. Un peu de géométrie amusante.

1. Dans la figure qui suit, on a tracé en pointillés le cercle de centre O et de rayon R (avec les notations de l'énoncé) dans lequel est inscrit notre polygône régulier :



2. Le triangle CON (quel joli nom...), en orange sur la figure, est isocèle en O puisque ON et OC sont deux rayons du cercle. Les angles (géométriques) $\widehat{NCO}$ et $\widehat{CNP}$ sont donc égaux. Comme de plus $\widehat{CON} = \frac{5\pi}{7}$ (puisque le polygone est régulier, on a $\widehat{S_iOS_j} = \frac{(j-i)\pi}{7}$ pour tous entiers i et j), on en déduit que $\widehat{NCO} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$. Le deuxième angle demandé découle immédiatement de la constatation signalée entre parenthèses juste avant.
3. Dans le triangle isocèle MON, le côté MN est égal à 1, et les deux autres côtés ont pour longueur R. De plus, l'angle $\widehat{MON}$ est égal à $\frac{\pi}{7}$. Si on note I le milieu de $[MN]$, le triangle MIO est donc rectangle en I, avec pour hypothénuse R. De plus, $\widehat{MOI} = \frac{\pi}{14}$, donc $\sin\left(\widehat{MOI}\right) = \frac{MI}{MO} = \frac{1}{2R}$. Autrement dit, $\frac{1}{2R} = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)$, donc $R = \frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{14})}$.
4. Dans le triangle MOP, qui est évidemment rectangle en P, on a $\widehat{MOP} = \widehat{MOD} = \frac{3\pi}{7}$, donc $\widehat{OMP} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7} = \frac{\pi}{14}$. On en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{OP}{R}$, donc $OP = R\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{2}$. En découle $CP = CO + OP = R + OP = \frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{14})} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sin(\frac{\pi}{14})}{2\sin(\frac{\pi}{14})}$. Or, $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$, donc $CP = \frac{1-\cos(\frac{4\pi}{7})}{2\sin(\frac{\pi}{14})}$.

   Plaçons-nous maintenant dans le triangle APC, rectangle en P. Comme $\widehat{ACP} = \widehat{NCO} = \frac{\pi}{7}$, on peut calculer $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{AP}{CP}$, donc $AP = CP\tan\left(\frac{\pi}{7}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \frac{1-\cos(\frac{4\pi}{7})}{2\sin(\frac{\pi}{14})}$ d'après le calcul qui précède.

Reste à simplifier cette magnifique expression. On peut commencer par exploiter les formules de duplication pour écrire que $\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) = 1-2\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, donc $AP = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{7})(1-\cos(\frac{4\pi}{7}))}{2\cos(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{\pi}{14})} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{7})\sin^2(\frac{2\pi}{7})}{\cos(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{\pi}{14})} = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\times\dfrac{2\sin(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{\pi}{7})}{\cos(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{\pi}{14})} = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\times\dfrac{4\sin(\frac{\pi}{14})\cos(\frac{\pi}{14})}{\sin(\frac{\pi}{14})} = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(2\dfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right)$. Or, $\dfrac{\pi}{14} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{7}$, ce qui permet bien d'obtenir finalement $AP = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

5. En reprenant les résultats de la partie B, on a donc $AP = 4\Pi = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, puis $AB = 2AP = \sqrt{7}$ (par symétrie évidente de toute la figure, P est le milieu de segment $[AB]$).