Devoir Maison n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 14 décembre 2022

Problème : autour de l'angle $\dfrac{2\pi}{7}$.

Dans tout le problème, on notera $a = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

A. Un exercice de colle classique.

On pose pour cette première partie $S = a + a^2 + a^4$ et $T = a^3 + a^5 + a^6$.

1. Que vaut a^7 ? Que peut-on dire de $\overline{a}$ et $\dfrac{1}{a}$?
2. Montrer que $T = \overline{S}$, et donner le signe de la partie imaginaire de S et de T en justifiant rigoureusement (mais sans faire de gros calcul).
3. Calculer $S + T$ et $S \times T$.
4. En déduire une équation du second degré vérifiée par S et T, puis la valeur de ces deux nombres.

B. Quelques applications plus ou moins passionnantes.

Les valeurs de S et T obtenues dans la première partie du problème pourront être réutilisées pour les calculs qui vont suivre. Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Calculer $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$, et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$.
2. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-a^2)^k = -i\tan\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

   (b) Justifier que $2(a^2 - a^5) = 4i\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$.

   (c) En déduire la valeur de $4\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.
3. On pose $P = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$ et $\Pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

   (a) Montrer que $8 \times P \times \Pi = \Pi$, en déduire la valeur de P.

   (b) En linéarisant $2\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$ puis $4\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, montrer que $4\Pi = \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$. En déduire la valeur de Π.

C. Un peu de géométrie amusante.

On s'intéresse dans cette partie à un tétradécagone (polygone régulier à 14 côtés) régulier de côté 1, dont on notera les sommets S_0, S_1, ..., S_{13} (dans le sens trigonométrique à partir du sommet S_0). On notera pour simplifier par la suite $C = A_0$ et $D = A_7$ (sommet du polygone diamétralement opposé à C). On construit les points suivants :

- on renomme M le sommet S_4 et N le sommet S_5
- A est l'intersection des segments $[CN]$ et $[MS_{10}]$
- B est l'intersection des segments $[CS_9]$ et $[MS_{10}]$
- O est le centre du polygone (milieu du segment $[CD]$)
- P est le projeté orthogonal du point M sur le segment $[CD]$

On note par ailleurs R la longueur CO, et le but est de calculer la longueur AB.

1. Faire une figure (normalement, cette question devrait être inutile, vous allez de toute façon devoir faire une figure !).
2. Montrer que $\widehat{NCO} = \dfrac{\pi}{7}$ et $\widehat{COM} = \dfrac{4\pi}{7}$.
3. Calculer R en fonction de $\sin\left(\dfrac{\pi}{14}\right)$.
4. Calculer CP puis montrer que $AP = \tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right) \times \dfrac{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}$,

   puis que $AP = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.
5. Conclure.