Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

24 novembre 2022

Première partie : étude d'une fonction taux d'accroissement.

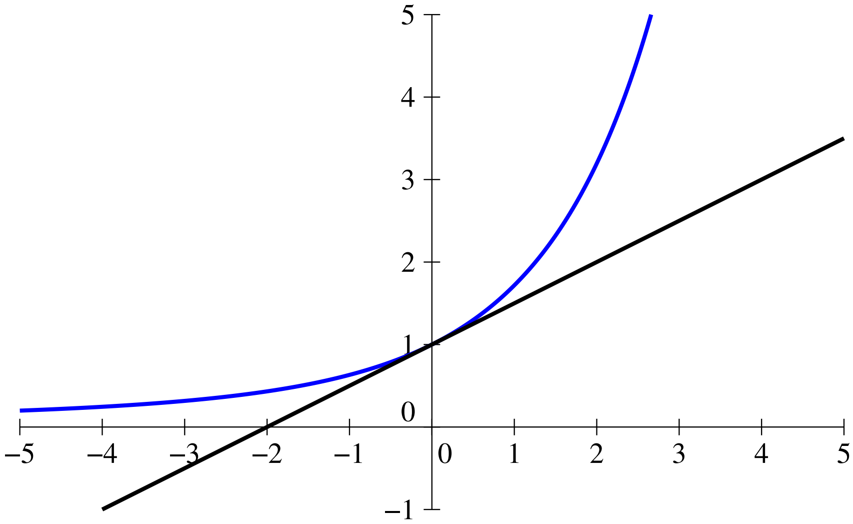
1. La fonction étant évidemment continue sur $\mathbb{R}^*$, le seul problème éventuel peut se poser en 0. Mais comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (limite classique de taux d'accroissement vue en cours), la fonction est également continue en 0. Elle est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$. Cette dérivée étant du signe de x, g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet en particulier pour minimum $g(0) = 1 \times (-1) + 1 = 0$, donc elle est toujours positive.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Puisque la fonction est toujours positive, f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc tout simplement croissante sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue en 0. Il manque les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = +\infty$ (le premier terme ayant pour limite $+\infty$ par croissance comparée). On a donc le tableau complet fort simple suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. On peut en effet affirmer que, $\forall t \in [0,1]$, $1 \leqslant e^t \leqslant 6$. On peut alors intégrer entre 0 et x (en supposant bien sûr $x \leqslant 1$) pour obtenir dans un premier temps $\displaystyle\int_0^x 1\ dt \leqslant \int_0^x e^t\ dt \leqslant \int_0^x 6\ dt$, soit $x \leqslant e^x - 1 \leqslant 6x$, ou encore $x + 1 \leqslant e^x \leqslant 6x + 1$. On recommence exactement avec le même principe : $\displaystyle\int_0^x t+1\ dt \leqslant \int_0^x e^t\ dt \leqslant \int_0^x 6t+1\ dt$, qui donne cette fois-ci $\dfrac{1}{2}x^2 + x \leqslant e^x - 1 \leqslant 3t^2 + t$ dont on peut déduire que $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant e^x \leqslant 1 + x + 3x^2$. L'encadrement demandé dans l'énoncé est une combinaison des deux précédents.
5. Calculons, si $x \neq 0$, $\displaystyle\int_0^1 e^{tx}\ dt = \left[\frac{e^{tx}}{x}\right]_0^1 = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = f(x)$. Bien sûr, on ne peut pas effectuer le même calcul pour $x = 0$, mais dans ce cas, $\displaystyle\int_0^1 e^{tx}\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1$, ce qui correspond bien à la valeur de $f(0)$. L'égalité est donc toujours valide.
En appliquant le dernier encadrement de la question précédente à tx (celui de l'énoncé n'a en fait aucun intérêt au niveau du membre de gauche), alors $1 + tx + \dfrac{1}{2}t^2x^2 \leqslant e^{tx} \leqslant 1 + tx + 3t^2x^2$, valable si $tx \leqslant 1$. On peut intégrer cet encadrement sur l'intervalle $[0,1]$: $\displaystyle\int_0^1 1 + tx + \frac{1}{2}t^2x^2\ dt =$

$\left[t+\frac{xt^2}{2}+\frac{x^2t^3}{6}\right]_0^1 = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{x^2}{6}$. Un calcul quasiment identique donne la majoration $1+x+3x^2$ pour l'intégrale de droite, ce qui prouve bien l'encadrement souhaité.

6. On déduit de la question précédente que, $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x \leqslant \frac{f(x)-1}{x} \leqslant \frac{1}{2}+x$. Une application directe du théorème des gendarmes donne alors bien $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$. Cela signifie que le taux d'accroissement de la fonction f en 0 a une limite égale à $\frac{1}{2}$, autrement dit que la fonction f est en fait dérivable également en 0, et que $f'(0)=\frac{1}{2}$.
7. La tangente demandée a donc pour équation $y=\frac{1}{2}x+1$.



Deuxième partie : étude d'une suite d'intégrales.

1. Tout simplement, la fonction $x \mapsto x^n\sqrt{1-x}$ est toujours continue sur $[0,1]$.
2. On calcule donc $I_0=\int_0^1 \sqrt{1-x}\ dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
3. On peut toujours essayer (le changement de variables est en tout cas valide) : on pose donc $t=\sqrt{1-x}$, soit $x=1-t^2$, qui donne $dx=-2t\ dt$, et les bornes sont changées en 1 et 0 (dans le mauvais sens donc). Autrement dit, $I=\int_1^0 -2t^2\ dt = 2\int_0^1 t^2\ dt=\frac{2}{3}$. La réponse est donc clairement oui !
4.
   - On pose tout simplement $u(x)=x$, donc $u'(x)=1$ et $v'(x)=\sqrt{1-x}$, qui s'intègre en $v(x)=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ (calcul déjà exploité pour la première question). On a alors $I_1 = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}\ dx = 0+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{15}$.
   - Allons-y donc : $t=1-x$ donc $x=1-t$, $dx=-\ dt$ mais les bornes sont inversées par le changement de variables, on les remettra immédiatement dans le bon sens pour simplifier et trouver $I_1=\int_0^1(1-t)\sqrt{t}\ dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\ dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$.
5. Histoire de rédiger de façon la plus naturelle possible, on va partir de I_{n+1} et effectuer une IPP en posant $u(x)=x^{n+1}$, donc $u'(x)=(n+1)x^n$, et $v'(x)=\sqrt{1-x}$ qu'on va une

nouvelle fois intégrer en $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$. On trouve donc $I_{n+1} = \left[\frac{2}{3}(n+1)x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (n+1)x^n(1-x)\sqrt{1-x}\ dx$
$= 0 + \frac{2(n+1)}{3}\left(\int_0^1 x^n\sqrt{1-x} - \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\ dx\right) = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$. Autrement dit, $3I_{n+1} = (2n+2)I_n - (2n+2)I_{n+1}$, dont on déduit bien que $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n$.

6. Commençons par calculer brillamment à l'aide de la question précédente $I_2 = \frac{2\times 1+2}{2\times 1+5}I_1 = \frac{4}{7}\times\frac{4}{15} = \frac{16}{105}$ (non, rien ne se simplifie), puis $I_3 = \frac{6}{9}\times\frac{16}{105} = \frac{32}{315}$.
Pour la formule générale, on va bien sûr procéder par récurrence en exploitant la formule de la question 5. Commençons par vérifier la formule pour $n = 1$: $\frac{4^2\times 1!\times 2!}{(2+3)!} = \frac{16\times 2}{120} = \frac{4}{15}$, ce qui est bien la valeur de I_1. Supposons désormais la formule correcte au rang n, alors $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n = \frac{(2n+2)4^{n+1}n!(n+1)!}{(2n+5)\times(2n+3)!} = \frac{(2n+4)\times 2\times 4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+5)!} = \frac{4\times 4^{n+1}\times(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}$, ce qui est bien la formule attendue pour I_{n+1}.

7. (a) On a le droit de poser $x = \sin^2(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction $\sin^2$ effectuant une bijection continue de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[0,1]$. Les bornes de l'intégrale vont donc devenir 0 et $\frac{\pi}{2}$, et on aura par ailleurs $x^n\sqrt{1-x} = \sin^{2n}(t)\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)\sin^{2n}(t)$ puisque $\cos(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle d'arrivée. De plus, $dx = 2\sin(t)\cos(t)\ dt$. Finalement, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(t)\sin^{2n+1}(t)\ dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))\sin^{2n+1}(t)\ dt = 2(W_{2n+1} - W_{2n+3})$.

   (b) En appliquant la relation donnée par l'énoncé à $2n+1$, on a donc $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}$, puis $\frac{1}{2}I_n = W_{2n+1} - \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} = \frac{1}{2n+3}W_{2n+1}$, soit $I_n = \frac{2}{2n+3}W_{2n+1}$.