Devoir Maison n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 24 novembre 2022

Première partie : étude d'une fonction taux d'accroissement.

On pose dans cette partie $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongée en 0 en posant $f(0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Étudier les variations et le signe de la fonction $g : x \mapsto e^x(x-1)+1$.
3. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, $\forall x \in [0,1]$, $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + 3x^2$ (on pourra par exemple partir de l'encadrement $1 \leqslant e^t \leqslant 6$ (valable sur $[0,1]$, et même assez large !) et intégrer deux fois cet encadrement, en utilisant le fait que, si $f(x) \leqslant g(x)$ sur tout l'intervalle $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$).
5. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{tx}\ dt$ (on fera attention à vérifier que l'égalité est correcte pour tout réel x).

   En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{x}{2} + x^2$.
6. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$. Quelle signification peut-on donner à ce résultat ? On admet que la limite en 0^- de ce même quotient serait aussi égale à $\dfrac{1}{2}$.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f, ainsi que de sa tangente en son point d'abscisse 0.

Deuxième partie : étude d'une suite d'intégrales.

On pose dans cette partie, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\ dx$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que l'intégrale I_n existe toujours ?
2. Calculer la valeur de I_0 à l'aide d'un calcul direct de primitive.
3. Aurait-on pu calculer la valeur de I_0 en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1-x}$?
4. Calculer l'intégrale I_1 de deux façons diffférentes :
   - à l'aide d'une IPP bien choisie.
   - en effectuant le changement de variable $t = 1 - x$ (oui, sans racine carrée), puis un calcul direct.
5. À l'aide d'une intégration par parties plus générale, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} I_n$ pour tout entier naturel n.
6. En déduire la valeur de I_2 et I_3, puis montrer plus généralement que $I_n = \dfrac{4^{n+1} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.
7. Les intégrales de Wallis sont définies par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$ (voir par exemple le deuxième problème de la feuille d'exercices n° 6, où elles sont définies avec des puissances de cosinus, mais les valeurs sont les mêmes).
   (a) À l'aide du changement de variable $x = \sin^2(t)$, montrer rigoureusement que $2(W_{2n+1} - W_{2n+3}) = I_n$.
   (b) Sachant que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ (on ne demande pas de montrer cette relation), trouver une relation simple entre I_n et W_{2n+1}.