Devoir Maison n^o 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

7 novembre 2022

Problème : construction des fonctions puissances.

I. Construction des racines n-èmes.

1. Il suffit pour cette question d'exploiter la croissante stricte de la fonction $y \mapsto y^n$ sur $]0, +\infty[$, qui peut se démontrer par récurrence en utilisant uniquement des manipulations basiques d'inégalité. Supposons donc $0 < y < z$ et montrons par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $0 < y^n < z^n$. La propriété est clairement vraie pour $n = 1$ puisque c'est notre hypothèse initiale, et si on suppose $0 < y^n < z^n$, il suffit de multiplier cet encadrement par celui pris comme hypothèse (on peut, tout est positif), pour obtenir $0 < y^{n+1} < z^{n+1}$. Deux réels strictement positifs distincts ont donc toujours des puissances n-èmes distinctes, ce qui prouve par contraposée que $y^n = z^n \Rightarrow y = z$. Il ne peut donc exister (au maximum) qu'un seul réel strictement positif tel que $y^n = x$.

2. (a) Il s'agit donc de prouver que $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n < x$. C'est évident pour $n = 1$: $1 + x > 1$, donc $\dfrac{x}{1+x} < x$. Remarquons également que $\dfrac{x}{1+x} < 1$ puisque $0 < x < 1+x$. On prouve alors par récurrence triviale que $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n < x$: c'est vrai au rang 1, et si c'est vrai au rang n, la multiplication du membre de gauche par $\dfrac{x}{1+x} < 1$ conservera l'inégalité.

   (b) On a déjà signalé que $x < 1+x$ et $1 < 1+x$. On en déduit (via la croissance des fonctions puissances démontrée à la première question) que $1 < (1+x)^n$ et $x^n < (1+x)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Or, si $x \leqslant 1$, on aura donc $x \leqslant 1 < (1+x)^n$, et si $x > 1$, alors $x \leqslant x^n < (1+x)^n$. Dans tous les cas, $x < (1+x)^n$, ce qui prouve qu'on a nécessairement $t^n < (1+x)^n$, et donc $t < 1+x$, encore une fois en exploitant la croissance stricte de la fonction $y \mapsto y^n$.

   (c) L'ensemble A_x est majoré et non vide, il admet nécessairement une borne supérieure.

3. On exploite l'identité remarquable démontrée en cours $b^k - a^k = (b-a) \times \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}$. Comme on a supposé $a < b$, on a $a^i \leqslant b^i$ (l'inégalité est stricte sauf pour $i = 0$), donc $a^i b^{k-1-i} \leqslant b^i b^{k-1-i} = b^{k-1}$ (on ne manipule que des puissances entières ici). On peut donc majorer la somme de droite dans notre identité remarquable par $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} b^{k-1} = kb^{k-1}$, l'inégalité demandée en découle immédiatement.

4. (a) En posant $b = y + h$ et $a = y$, on peut appliquer le résultat de la question 3 pour obtenir $b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1} = nh(y+h)^{n-1}$. Or, on a supposé $h < 1$, donc $(y+h)^{n-1} < (y+1)^{n-1}$, et comme par ailleurs on a aussi (toujours par hypothèse) $h < \dfrac{x - y^n}{n(1+y)^{n-1}}$, on peut majorer brutalement $nh(y+h)^{n-1}$ par $n \times \dfrac{x - y^n}{n(1+y)^{n-1}} \times (1+y)^{n-1} = x - y^n$, soit exactement la majoration souhaitée.

(b) On déduit directement de la question précédente que $(y+h)^n < x$, ce qui prouve effectivement que $y+h \in A_x$. Notons qu'il existe toujours un réel h vérifiant les hypothèses faites puisque $x - y^n > 0$ par hypothèse, donc $\dfrac{x-y^n}{n(1+y)^{n-1}}$ également, et on peut donc trouver des réels strictement positifs inférieurs à cette valeur.

(c) S'il existe un réel strictement positif h tel que $y+h \in A_x$, y ne peut pas être la borne supérieure de l'ensemble A_x (cela contredit la définition même de borne supérieure). L'hypothèse $y^n < x$ est donc absurde, ce qui prouve que $y^n \geqslant x$.

5. Constatons déjà qu'un tel réel k est strictement positif avec l'hypothèse $y^n - x > 0$, et surtout que $y - k \geqslant x$, donc $y-k$ est également strictement positif. On applique exactement le même raisonnement que précédemment à $a = y-k$ et $b = y$: $y^n - (y-k)^n \leqslant n \times k \times y^{n-1} = y^n - x$, donc $(y-k)^n \geqslant x$ (il faut juste faire attention au sens de l'inégalité quand on manipule). Tout réel $t \in A_x$ vérifie donc $t^n \leqslant x \leqslant (y-k)^n$, ce qui par croissance de la fonction puissance n implique $t \leqslant y-k$. On a bien prouvé que $y-k$ était un majorant de A_x, et donc que y ne peut à nouveau pas être borne supérieure de A_x, puisqu'il existe un majorant de A_x strictement plus petit que lui. L'hypothèse $y^n > x$ est donc absurde, ce qui prouve que $y^n \leqslant x$.

6. Les deux inégalités prouvées démontrent que $y^n = x$, on a construit une notion cohérente de racine n-ème.

7. Par définition, $((ab)^{\frac{1}{n}})^n = ab$, mais par ailleurs $(a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n \times (b^{\frac{1}{n}})^n = a \times b$ (on a le droit d'utiliser la règle de calcul $(uv)^n = u^n \times v^n$ pour des puissances entières de nombres positifs). Les deux nombres ont donc la même puissance n-ème et sont tous les deux strictement positifs, ils sont égaux d'après la tout première question de cette partie.

II. Puissances rationnelles.

1. Si on est capable de définir les puissances rationnelles de tous les nombres supérieurs à 1, on en déduira celles des nombres appartenant à $]0,1[$ par un simple passage à l'inverse : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^r = \dfrac{1}{x^r}$, avec $r \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{1}{x} \in]0,1[$ donc $x > 1$.

2. Notons $a = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $b = (x^s)^{\frac{1}{t}}$. Par définition, $a^q = x^p$ et $b^t = x^s$. On peut en déduire (ce sont des puissances entières qu'on va manipuler) que $a^{qt} = (x^p)^t = x^{pt}$, et de même que $b^{tq} = (x^s)^q = x^{sq}$. Or, par hypothèse, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$, donc $pt = qs$, et $x^{pt} = s^{qs}$. On a donc prouvé que $a^{qt} = b^{tq}$, ce qui prouve que $a = b$ en appliquant pour la 42-ème fois la stricte croissance des puissances entières.

3. Si r et s sont deux rationnels, on peut toujours les mettre au même dénominateur pour les mettre sous la forme $r = \dfrac{p_1}{q}$ et $s = \dfrac{p_2}{q}$. On a alors $x^{r+s} = x^{\frac{p_1+p_2}{q}} = (x^{p_1+p_2})^{\frac{1}{q}} = (x^{p_1} \times x^{p_2})^{\frac{1}{q}} = (x^{p_1})^{\frac{1}{q}} \times (x^{p_2})^{\frac{1}{q}} = x^r \times x^s$ (on a appliqué une fois de plus des règles de calcul autorisées sur les puissances entières, et surtout le résultat de la dernière question de la partie I pour séparer les puissances à la fin.

4. Avec l'hypothèse $r \leqslant s$, on peut toujours noter $r = \dfrac{p_1}{q}$ et $s = \dfrac{p_2}{q}$, avec $p_1 \leqslant p_2$. On a alors trivialement $x^{p_1} \leqslant x^{p_2}$ (ici, ce sont des puisssances entières, et on a supposé $x > 1$). Or, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$. On ne l'a pas encore prouvé explicitement, mais c'est assez évident avec la définition donnée dans la première partie : si $x \leqslant x'$ alors $A_x \subset A_{x'}$ (avec les notations de la question $I.2$), donc tout majorant de $A_{x'}$ est aussi un majorant de A_x et $\sup(A_x) \leqslant \sup(A_{x'}$. Ceci prouve bien que $(x^{p_1})^{\frac{1}{q}} \leqslant (x^{p_2})^{\frac{1}{q}}$, donc $x^r \leqslant x^s$.

III. Puissances réelles quelconques.

1. Le résultat de la question $II.4$ prouve que B_y est majoré par x^y. Comme x^y est par ailleurs un élément de B_y quand y est rationnel, l'ensemble admet donc dans ce cas un maximum égal à x^y, qui est aussi sa borne supérieure. Autrement dit, la définition donnée des puissances réelles quelconques généralise correctement celle des puissances rationnelles.
2. Si y est un réel strictement positif quelconque, il existe toujours un rationnel (et même un entier) z vérifiant $y \leqslant z$ (par exemple $z = \lfloor y \rfloor + 1$). La question $II.4$ prouve alors que B_y est majoré par x^z. L'ensemble B_y n'étant par ailleurs jamais vide (il contient par exemple $x^1 = x$), il admet donc nécessairement une borne supérieure.
3. Si $\alpha \in B_y$ et $\beta \in B_z$, alors $\alpha = x^r$ avec $r \leqslant y$ et $\beta = x^s$ avec $s \leqslant z$, donc $r + s \leqslant y + z$, et $x^{r+s} = x^r \times x^s \leqslant x^{y+z}$. Comme cette inégalité est vraie quels que soient les éléments choisis dans B_y et B_z, on peut « passer à la limite » pour en déduire qu'elle reste vraie pour les bornes supérieures, et donc que $x^y \times x^z \leqslant x^{y+z}$ (pour faire les choses tout à fait rigoureusement, on passe deux fois à la limite, d'abord pour α puis pour β). Réciproquement, la caractérisation de la borne supérieure permet de choisir des valeurs de α et de β telles que $x^y - \varepsilon \leqslant \alpha = x^r \leqslant x^y$ et $x^z - \varepsilon \leqslant \beta = x^s \leqslant x^z$, quel que soit le réel strictement positif ε. On en déduit, en multipliant les deux encadrements, que $x^{r+s} - 2\varepsilon \leqslant x^y \times x^z$ (on a laissé tomber en cours de route le ε^2 qui ne fait qu'alourdir l'écriture et ne sert à rien), donc $x^{y+z} \leqslant x^y \times x^z + 2\varepsilon$. Comme ε peut être choisi arbitrairement proche de 0, on peut en déduire que $x^{y+z} \leqslant x^y \times x^z$, ce qui combiné à la première inégalité obtenue prouve bien que $x^{y+z} = x^y \times x^z$.

Exercice bonus.

Supposons donc $x_1 + \cdots + x_n = 42$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$, alors l'inégalité arithmético-géométrique prouve que $x_1 \times \cdots \times x_n \leqslant \left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n = \left(\dfrac{42}{n}\right)^n$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{42}{n}$. La valeur maximale de notre produit est donc égale à $\left(\dfrac{42}{n}\right)^n$. Quelques exemples plus concrets pour visualiser ce que ça donne :

— pour $n = 2$, on prend simplement $x_1 = x_2 = 21$ et on obtient un produit égal à $21^2 = 441$.

— pour $n = 3$, on prend trois nombres égaux à 14 et on obtient un produit égal à $14^3 = 2\ 744$. Jusque-là on a l'impression que le produit va augmenter très vite quand on augmente la valeur de n, mais c'est un peu plus compliqué que ça.

— pour $n = 10$ (allons un peu plus loin), on prend dix nombres tous égaux à 4.2, et on obtient un produit égal à $(4.2)^{10} = 1\ 708\ 019.812\ 17$. Pas mal. Mais ça finira forcément par redescendre car on sait que pour un certain cas particulier, la réponse va être assez débile !

— pour $n = 42$, on prend 42 nombres tous égaux à 1, et le produit vaut évidemment 1. On ne peut vraiment pas faire mieux en prenant certains nombres plus gros et d'autres plus petits que 1 ? Ben non.

— pour $n = 50$, on prend 50 nombres tous égaux à $\dfrac{42}{50} = 0.84$, et le produit vaut donc $0.84^{50} \simeq 0.000\ 164$. Le produit va tendre très vite vers 0 si on continue.

Bon, mais alors du coup, ces produits maximaux ont-ils un maximum ? Vu la formule obtenue, on va simplement poser $f(x) = \left(\dfrac{42}{x}\right)^x = e^{x(\ln(42)-\ln(x))}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $f'(x) = f(x) \times (\ln(42) - \ln(x) - 1)$. Cette dérivée s'annule en particulier lorsque $\ln(x) = \ln(42) - 1$, donc en $x_0 = e^{\ln(42)-1} = e^{\ln(\frac{42}{e})}$. La fonction admet un maximum en x_0, qui vaut approximativement 15.4, et elle est croissante sur $]0, x_0]$ et décroissante ensuite. Si on se restreint à des valeurs de x entières, le maximum est donc atteint pour $n = 15$ ou $n = 16$, et on vérifie à la main : $\left(\dfrac{42}{15}\right)^{15} \simeq 5\ 097\ 655$, et $\left(\frac{42}{16}\right)^{16} \simeq 5\ 082\ 401$. Le plus grand produit possible est donc atteint pour $n = 15$.

Pour le cas des entiers naturels, on peut déjà se restreindre à des valeurs de n ne dépassant pas 42 (sinon on ne pourra pas construire n entiers naturels non nuls dont la somme vaut 42). Il n'y a pas de méthode vraiment mathématique évidente, même si sans surprise les résultats atteints sont assez proches de ce qu'on trouve avec des réels :

— pour $n = 2$ ou $n = 3$, la solution optimale étant de toute façon constituée d'entiers, on ne change rien.
— pour $n = 4$, le produit optimal est égal à 12 100, atteint en prenant $x_1 = x_2 = 11$ et $x_3 = x_4 = 10$ (avec des réels, on atteint un produit maximal égal à 12 155.0625).
— pour $n = 5$, il faut choisir trois nombres égaux à 8 et deux égaux à 9, sans surprise, pour obtenir un produit maximal égal à 41 472.
— pour $n = 6$ ou $n = 7$ on retombe sur des cas où l'optimum est constitué de nombres entiers (produit égal à 117 649 pour $n = 6$ et à 279 936 pour $n = 7$).
— je ne vais pas faire tous les cas, pour $n = 10$, on prend huit nombres égaux à 4 et deux égaux à 5 pour obtenir un produit égal à 1 638 400.
— pour $n = 14$, on retombe sur un cas où l'optimum est constitué de nombres entiers, en l'occurrence $3^{14} = 4\ 782\ 969$.
— pour $n = 15$, on prend douze nombres égaux à 3 et trois égaux à 2, ce qui donne un produit égal à 4 251 528. On est déjà en-dessous ce qu'on obtenait avec 14 entiers.
— pour $n = 16$, dix nombres égaux à 3 et six égaux à 2 donnent un produit égal à 3 779 136, donc encore nettement moins. On ne redépassera jamais la valeur obtenue pour $n = 14$.
— pour $n = 40$ par exemple, on ne peut pas faire mieux que prendre deux entiers égaux à 2 et tous les autres égaux à 1, pour un produit égal à 4. Alors qu'avec des réels, le produit maximal serait égal à $\left(\frac{42}{40}\right)^{42} \simeq 7.762$. Quasiment deux fois plus ! En fait, on ne peut pas avoir un écart gigantesque entre les deux produit maximaux, mais c'est loin d'être évident à prouver.