# Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 7 novembre 2022

## Problème : construction des fonctions puissances.

Le but de ce problème assez théorique est de construire toutes les fonctions puissances vues en cours uniquement en exploitant les propriétés élémentaires des opérations sur les réels (règles de calcul sur les inégalités notamment) et la structure de l'ordre sur $\mathbb{R}$ (existence et caractérisation de la borne supérieure), mais sans recours à d'autres résultats plus puissants ou à d'autres fonctions. Il est donc complètement interdit pour ce devoir d'utiliser le théorème de la bijection (ce qu'on a fait en cours pour définir les racines $n$-èmes) ou d'utiliser des fonctions du type exponentielles ou logarithmes (ce qu'on a fait en cours pour définir les puissances « quelconques »).

On suppose déjà contruites les puissances entières par récurrence comme vu en cours : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x \times x^n$. Pour toute la suite de l'exercice, on suppose que $x$ est un réel strictement positif, et $n$ désignera toujours un élément de $\mathbb{N}^*$.

### I. Construction des racines $n$-èmes.

Dans les six premières questions, les valeurs de $x$ et $n$ sont fixées (on rappelle que $x > 0$, on ne s'embêtera pas à prolonger les racines $n$-èmes à $\mathbb{R}^-$ quand $n$ est impair).

1. Montrer que, s'il existe un réel strictement positif $y$ tel que $y^n = x$, alors $y$ est unique (interdition d'utiliser des histoires de bijection !).
2. On note $A_x = \{t \in \mathbb{R}^{+*} \mid t^n < x\}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{x}{1+x} \in A_x$.
   (b) Montrer que $t \in A_x \Rightarrow t < 1 + x$.
   (c) En déduire que $A_x$ possède une borne supérieure qu'on notera $y$.
3. Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $a < b$, montrer que $b^k - a^k \leqslant k(b-a)b^{k-1}$ pour tout entier naturel $k$.
4. On souhaite prouver que le réel $y$ défini en question 2 vérifie $y^n \geqslant x$. Supposons par l'absurde que $y^n < x$.
   (a) Soit $h$ un réel strictement positif tel que $h < \min\left(1, \dfrac{x - y^n}{n(1+y)^{n-1}}\right)$. Montrer que $(y + h)^n - y^n < x - y^n$.
   (b) En déduire que $y + h \in A_x$.
   (c) Conclure.
5. On veut maintenant prouver que $y^n \leqslant x$. On raisonne encore une fois par l'absurde en supposant $y^n > x$. En notant cette fois $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, montrer que $y - k$ majore $A_x$ et conclure.
6. Que peut-on déduire des questions précédentes ? On notera désormais $y = x^{\frac{1}{n}}$.
7. Montrer que, si $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs, $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$.

### II. Puissances rationnelles.

Soit $x > 1$, on va construire les puissances rationnelles du nombre $x$.

1. Comment pourra-t-on déduire de cette construction les puissances rationnelles des autres réels strictement positifs ?
2. Soit $r \in \mathbb{Q}^+$, on suppose que $r$ peut s'écrire de deux façons différentes comme quotient d'entiers naturels : $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$. Montrer que $(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^s)^{\frac{1}{t}}$. On notera alors simplement $x^r$ cette valeur commune.
3. Montrer que, pour tous rationnels strictement positifs $r$ et $s$, on a $x^{r+s} = x^r \times x^s$.
4. Montrer que, si $r \leqslant s$, $x^r \leqslant x^s$.

### III. Puissances réelles quelconques.

On conserve dans cette dernière partie l'hypothèse $x > 1$, et on fixe un réel strictement positif $y$. On souhaite définir la valeur de $x^y$, et on pose pour cela $B_y = \{x^r \mid r \in \mathbb{Q}^+, r \leqslant y\}$.

1. Montrer que, si $y$ est lui-même un nombre rationnel, alors $B_y$ admet une borne supérieure égale à $x^y$.
2. Montrer que l'ensemble $B_y$ admet en fait **toujours** une borne supérieure, qu'on notera $x^y$.
3. Montrer que, si $y$ et $z$ sont deux réels strictement positifs quelconques, $x^{y+z} = x^y \times x^z$.

## Exercice bonus.

Quelle est la valeur maximale du produit de $n$ réels strictement positifs dont la somme est fixée égale à 42 ? Je suis gentil, je vous donne la réponse quand $n = 1$ : on considère un seul réel nécessairement égal à 42, donc le produit vaut 42, qui est donc le maximum recherché. C'est bien sûr plus intéressant avec deux, trois, voire beaucoup plus de réels. L'ensemble de tous les maximums obtenus pour les différentes valeurs possibles de $n$ admet-il lui-même un maximum ?

Pour ceux qui ont trouvé ça trop trivial, même question mais avec $n$ **entiers** naturels au lieu de simples réels strictement positifs (la somme doit toujours être égale à 42). Toute tentative intéressante (voire même des programmes Python) sera lue avec attention.