Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

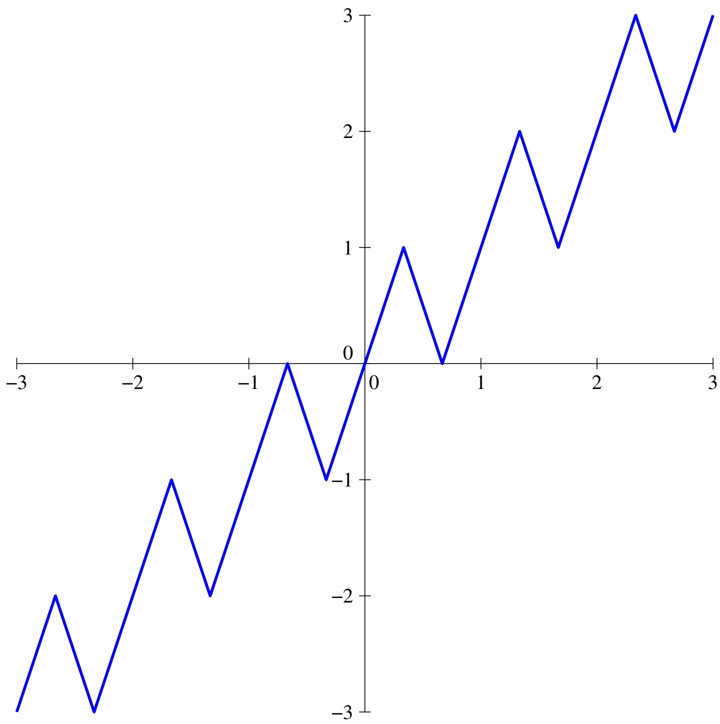
MPSI Lycée Camille Jullian

6 octobre 2022

Exercice 1 : quelques énigmes mathématiques.

1. C'est en fait complètement trivial : un palindrome à six chiffres est parfaitement déterminé par le choix de ses trois premiers chiffres, qui peut être quelconque. On a donc $10^3 = 1\ 000$ palindromes à six chiffres.
2. On décompose tous les entiers de 1 à 20 en facteurs premiers : 1, 2, 3, 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3, 3^2, $2^{\times}5$, 11, $2^2 \times 3$, 13, 2×7, 3×5, 2^4, 17, 2×3^2, 19, $2^2 \times 5$, puis on calcule leur ppcm en prenant, pour chaque facteur premier apparaissant au moins une fois dans ces différentes décompositions, la puissance la plus grande avec laquelle il apparait. La réponse est donc $n = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 232\ 792\ 560$.
3. C'est impossible pour $n = 2$. En effet, supposons qu'une telle fonction continue existe, alors 0 en particulier admet exactement deux antécédents, qu'on note a et b, avec $a < b$. Sur l'intervalle $]a, b[$, la fonction ne s'annule donc pas, et reste de signe constant (sinon, étant continue, elle passerait forcément par 0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Supposons par exemple que f est positive sur $]a, b[$. Elle prend en particulier des valeurs strictement positives sur $]a, b[$. Notons α une telle valeur, atteinte en un réel $c \in]a, b[$, alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction prend la valeur $\dfrac{\alpha}{42}$ une fois entre a et c, et une autre fois entre c et b. Elle ne peut donc pas reprendre cette valeur sur les intervalles $]-\infty, a]$ ou $[b, +\infty[$, ce qui impose que $f(x) < \alpha$ sur ces deux intervalles (sinon, une nouvelle application du TVI imposerait que f y passe par la valeur $\dfrac{\alpha}{42}$). Revenons à notre intervalle $[a, b]$. La fonction f y est continue, donc nécessairement bornée (ok, c'est un théorème qu'on n'a pas encore vu) par un certain réel $M > \alpha$. Le réel $M + 1$ n'admettra alors aucun antécédent (il ne peut pas en avoir sur $[a, b]$, ni sur $]-\infty, a]$ ou sur $[b, +\infty[$), ce qui est contradictoire.

   Pour $n = 3$, de telles fonctions existent, on peut assez facilement tracer une allure de courbe convenable (cf ci-dessous). Plus généralement, des solutions existent pour tous les entiers n impairs, mais jamais pour les entiers pairs.



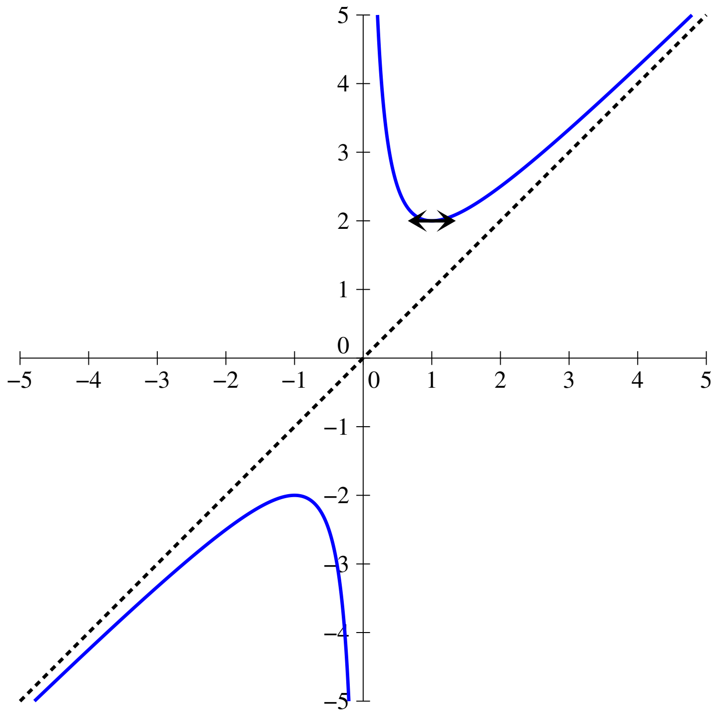
4. On ne peut pas avoir de solution avec $n = 1$, puisqu'il faudrait alors que $p^n = 1$, ce qui n'est pas possible si $p > 1$ et $n \neq 0$. Ensuite je vous renvoie à la correction de l'exercice 6 de la feuille d'exercices n° 3 où cette même question est traitée !

Exercice 2 : un problème plus classique.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$. Cette dérivée est du signe de $x^2 - 1$, la fonction f sera donc croissante sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, et décroissante sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$. On aura en particulier un maximum local atteint pour $f(-1) = -1 - 1 = -2$, et un minimum local atteint pour $f(1) = 2$.
2. La fonction f est manifestement impaire : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x - \dfrac{1}{x} = -f(x)$. La deuxième égalité demandée est encore plus triviale !
3. On calcule sans difficulté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, les deux autres limites s'en déduisent puisque f est impaire. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. On peut facilement constater que la courbe est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]0, +\infty[$ et en-dessous sur $]-\infty, 0[$, et même que cette droite est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ comme en $-\infty$ puisque $f(x) - x = \dfrac{1}{x}$, donc le signe et les limites sont évidents. On sait par ailleurs que le point d'abscisse 1 correspond à un minimum local et que la tangente à la courbe y sera horizontale, d'équation $y = 2$.



5. (a) Partons plutôt du calcul du membre de droite de l'égalité souhaitée : $f(x) \times f(x^n) - f(x^{n-1}) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = f(x^{n+1})$.

   (b) On va effectuer une récurrence double pour prouver la propriété $P_n : f(x^n) \in \mathbb{Z}$. Par hypothèse, la propriété est vraie pour $n = 1$, mais elle l'est aussi pour $n = 0$ puisque $f(x^0) = f(1) = 2 \in \mathbb{Z}$. Avoir une initialisation **double** est essentiel quand on rédige une récurrence double. On suppose maintenant que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, les propriétés P_n **et** P_{n-1} sont vraies, autrement dit que $f(x^{n-1})$ et $f(x^n)$ sont tous les deux entiers. Comme $f(x)$ est toujours supposé entier, la relation démontrée à la question précédente permet alors d'affirmer que $f(x^{n+1}) \in \mathbb{Z}$ (il est obtenu comme somme et produit d'entiers), c'est-à-dire que P_{n+1} est vraie. Toutes les propriétés P_n sont alors vraies, par principe de récurrence double.

6. (a) C'est une application immédiate du théorème de la bijection : f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, donc bijective de chacun de ces intervalles vers $[2,+\infty[$ (l'intervalle image étant le même dans les deux cas). Puisqu'on a supposé $p \geqslant 2$, l'entier p possède donc exactement un antécédent dans chacun des deux intervalles.

   (b) On sait déjà que $f(1) = 2$, l'unicité de x_p permet donc d'affirmer que $x_2 = 2$. Pour x_3 on cherche un réel appartenant à $]0,1]$ vérifiant $x + \frac{1}{x} = 3$, donc $\frac{x^2+1-3x}{x} = 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$ et admet pour racines $x_a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La valeur de x_b étant strictement supérieure à 1, elle correspond à y_3, et $x_3 = x_a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (qui appartient bien à $]0,1]$).

   (c) Si $x_p \in]0,1]$, $\frac{1}{x_p} \in [1,+\infty[$ et $f\left(\frac{1}{x_p}\right) = f(x_p) = p$ d'après la question 2. L'unicité de y_p permet alors d'affirmer que $y_p = \frac{1}{x_p}$.

   (d) La fonction f est strictement décroissante et bijective de $]0,1]$ vers $[2,+\infty[$. Si on note g sa réciproque, g sera également décroissante (théorème de la bijection), donc $x_{p+1} = g(p+1) \geqslant g(p) = x_p$, ce qui prouve que (x_p) est une suite décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 0, elle converge. En tant qu'inverse d'une suite positive et décroissante, (y_p) est une suite croissante.

(e) On sait que $y_p = \dfrac{1}{x_p}$, donc $x_p + y_p = f(x_p) = p$. En particulier, puisque $x_p \geqslant 0$, $y_p \geqslant p$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{p \to +\infty} y_p = +\infty$. En passant à l'inverse, on a donc $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = 0$.

(f) On reprend la même méthode que pour le calcul de x_3 : $\dfrac{x^2 + 1 - p}{x} = 0$, le numérateur a pour discriminant $\Delta = p^2 - 4 \geqslant 0$ puisque $p \geqslant 2$. La plus petite des deux racines est égale à x_p et la plus grande à y_p, donc $x_p = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}$ et $y_p = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}$.

7. On sait que $f(x_p) = p \in \mathbb{Z}$, donc $f(x_p^n) \in \mathbb{Z}$ (question 5.b). Comme $x_p^n > 0$, cette image est nécessairement supérieure ou égale à 2, notons q l'entier correspondant. Comme $f(x_p^n) = q$ et $f(x_q) = q$, la bijectivité de f sur l'intervalle $]0, 1]$ assure que $x_p^n = x_q$, ce qui est exactement ce qu'on nous demandait. On vient de voir que $q = f(x_p^n) = \left(\dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right) + \left(\dfrac{2}{p + \sqrt{p^2 - 4}}\right)^n$.
Pour $p = 4$, on calcule donc $x_4 = \dfrac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $\dfrac{1}{x_4} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ en multipliant par la quantité conjuguée. Pour $n = 5$, on a donc $q = (2 + \sqrt{3})^5 + (2 - \sqrt{3})^5 = 32 + 80\sqrt{3} + 240 + 120\sqrt{3} + 90 + 9\sqrt{3} + 32 - 80\sqrt{3} + 240 - 120\sqrt{3} + 90 - 9\sqrt{3} = 724$.