Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 6 octobre 2022

Exercice 1 : quelques énigmes mathématiques.

Dans ce premier exercice un peu inhabituel, je vous propose quelques énoncés volontairement peu conformes à ce que vous trouverez habituellement dans vos devoirs. Tout élément de réponse, même incomplet, sera apprécié. Bien sûr, si on peut justifier rigoureusement les réponses données, c'est encore mieux !

1. Un nombre entier est un palindrome s'il n'est pas modifié quand on lit les chiffres de son écriture décimale de droite à gauche (par exemple, 1583851 est un palindrome). Combien existe-t-il de palindromes à six chiffres (on autorise les 0 inutiles en début de nombre, ainsi 014410 est une solution valable) ?
2. Quel est le plus petit nombre entier qui soit divisible par tous les entiers compris entre 1 et 20 ?
3. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ tout entier, et pour laquelle tout réel admet exactement deux antécédents ? Même question avec trois antécédents. Oh, et puis tant qu'à faire, même question avec n antécédents, pour un entier naturel n quelconque.
4. Déterminer tous les couples d'entiers naturels n et p vérifiant $0 < n < p$ et $n^p = p^n$.

Exercice 2 : un problème plus classique.

On considère dans tout ce problème la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Étudier la parité de la fonction f, et vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f, en ajoutant au graphique la droite d'équation $y = x$ et la tangente à la courbe en son point d'abscisse 1.
5. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x^{n+1}) = f(x) \times f(x^n) - f(x^{n-1})$.
   (b) On suppose que $f(x) \in \mathbb{Z}$. Montrer à l'aide de la question précédente que $f(x^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier naturel n (on risque d'avoir besoin d'une récurrence un peu particulière pour s'en sortir rigoureusement ici).
6. Soit p un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $x_p \in]0,1]$ et un unique réel $y_p \in [1,+\infty[$ tels que $f(x_p) = f(y_p) = p$ (sans chercher à les calculer pour l'instant).
   (b) Calculer x_2 et x_3.
   (c) Justifier que $y_p = \dfrac{1}{x_p}$.
   (d) Expliquer pourquoi la suite (x_p) est décroissante. Est-elle convergente ? Quelle est la monotonie de la suite (y_p) ?
   (e) Que vaut $x_p + y_p$? En déduire les limites des deux suites (x_p) et (y_p).
   (f) Résoudre l'équation $f(x) = p$ et en déduire les valeurs explicites de x_p et y_p.
7. Soit $p \geqslant 2$ un entier naturel, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un entier $q \geqslant 2$ tel que $\left(\dfrac{p - \sqrt{p^2-4}}{2}\right)^n = \dfrac{q - \sqrt{q^2-4}}{2}$. Préciser l'entier q. Donner la valeur de q quand $p = 4$ et $n = 5$.