Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 septembre 2022

Exercice 1

A. Questions préliminaires.

1. (a) La fonction g est certainement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = e^x - 1$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, admettant un minimum en 0.

   (b) Comme $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$, la fonction est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, et en particulier sur $]0, +\infty[$.

2. (a) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$. Cette dérivée est du signe de $1 - x$, donc h est croissante sur $]-\infty, -1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, admettant pour maximum $h(1) = e - 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$, et comme $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée), on aura $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant pour la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			$e-1$		
h	-1	$\nearrow$		$\searrow$	
					$-\infty$

   (b) L'énoncé était manifestement buggué à cet endroit : étant continue et strictement monotone sur chacun des deux intervalles, h est bijective de $]-\infty, 1]$ vers $]-1, e-1]$, puis de $[1, +\infty[$ vers $]-\infty, e-1]$. Le réel $e - 1$ étant strictement positif, 0 appartient à chacun des deux intervalles images, et l'équation $h(x) = 0$ admet donc **deux** solutions, l'une sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qu'on notera donc α, et la deuxième sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ qu'on va noter β. On peut même noter que $h(0) = 1 > 0$, donc $\beta < 0$.

   (c) La fonction h sera positive dans l'intervalle $[\beta, \alpha]$ et négative sur chacun des deux intervalles $]-\infty, \beta]$ et $[\alpha, +\infty[$.

B. Étude de f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1. La seule chose qui pourrait empêcher f d'être définie sur $\mathbb{R}$ serait l'annulation de son dénominateur. Or, on a prouvé plus haut que $g(x) \geqslant 0$, ce qui se traduit par l'inégalité $e^x \geqslant x + 1$. A fortiori $e^x > x$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

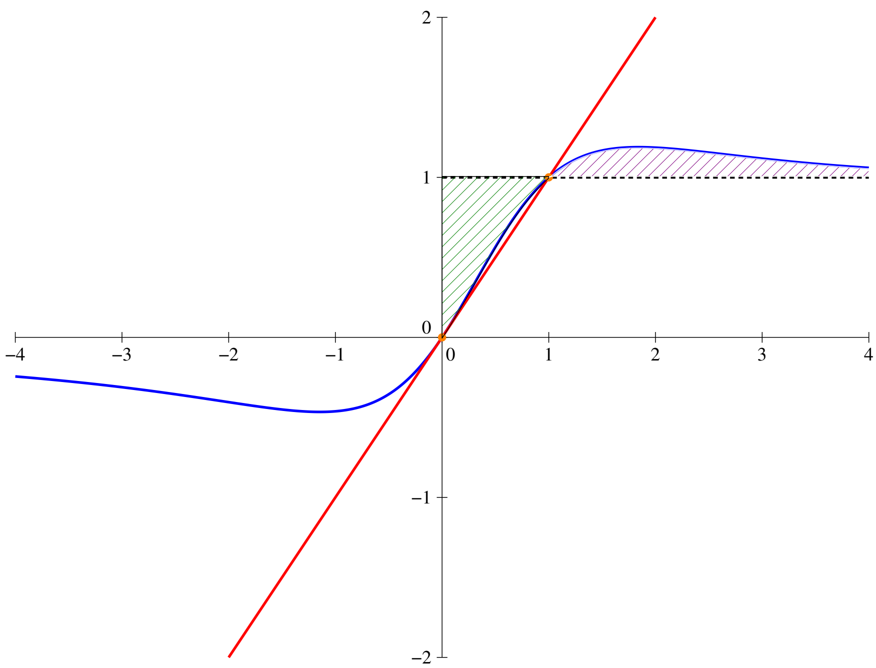
2. On va factoriser numérateur et dénominateur par e^x pour obtenir $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ (croissance comparée classique), on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$. Cette dérivée est donc du signe de $h(x)$, qu'on a étudié

plus haut. On ne peut bien entendu pas calculer la valeur du minimum et du maximum de f, on se contentera donc du tableau suivant :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

4. Pour cela, on calcule classiquement $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$ $= \dfrac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} = \dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{e^x - x}$. Le dénominateur est toujours positif, le facteur $x + 1 - e^x$ est toujours négatif d'après la première question de l'exercice, donc $f(x) - x$ est du signe opposé à celui de $x - 1$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}$ sera au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, et en-dessous sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Les des courbes se coupent au point de coordonnées $(1, 1)$, mais aussi au point de coordonnées $(0, 0)$ puisque le facteur $x + 1 - e^x$ s'annule (sans changer de signe) en 0.
5. On calcule $f(0) = 0$, puis $f'(0) = h(0) = 2e^0 - 1 = 1$, et on déduit que la tangente en question a pour équation $y = x$.
6. On est bien sûr obligés de placer aléatoirement le maximum et le minimum, par contre, on fait attention à bien respecter les asymptotes horizontales et la position relative par rapport à la droite d'équation $y = x$ (les points d'intersection sont indiqués en orange ci-dessous) :



C. Étude d'une suite d'intégrales.

1. Comme f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ (en posant $u(x) = e^x - x$, on a bien $u'(x) = e^x - 1$), et que la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$, f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \ln(e^x - x)$. On en déduit $u_n = [\ln(e^x - x) - x]_0^n = \ln(e^n - n) - n$ puisque notre primitive s'annule en 0.

2. Pour déterminer la limite, écrivons $\ln(e^n - n) = \ln(e^n(1 - ne^{-n})) = n + \ln(1 - ne^{-n})$. On en déduit que $u_n = \ln(1 - ne^{-n})$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$, dont on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Le nombre $u_n - u_1$ est égal à $\displaystyle\int_1^n (f(t) - 1)\, dt$, ce qui représente l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite horizontale d'équation $y = 1$, entre les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n$ (aire hachurée en violet sur le graphique précédent, jusqu'à l'abscisse $x = 4$ où s'arrête la représentation). D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - u_1 = -u_1$, ce qui prouve que l'aire hachurée en violet, si on fait tendre la limite supérieure vers $+\infty$, va être égale à l'aire hachurée en vert située entre $\mathcal{C}$, la droite $y = 1$ et $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

Exercice 2

1. Si l'entier n est un entier impair, alors l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2. Supposons dans un premier temps $n = 4k+1$, alors $n^2 - 1 = (4k+1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 1 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k)$ qui est un entier divisible par 8. Traitons maintenant le deuxième cas : si $n = 4k+3$, alors $n^2 - 1 = (4k+3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$, qui est encore un entier divisible par 8. Tout entier impair vérifie donc la propriété $\neg A$, ce qui prouve notre contraposée, et donc l'implication $A \Rightarrow B$.
3. Tous les entiers naturels peuvent s'écrire sous la forme $n = 4k + r$, avec $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ (c'est le principe même de la division euclidienne, r sera le reste de la division de n par 4). Si $r = 0$ ou $r = 2$, l'entier n sera manifestement pair, donc on doit avoir $r = 1$ ou $r = 3$ lorsque n est impair.
4. Pour que les énoncés soient équivalents, il faudrait que l'implication réciproque $B \Rightarrow A$ soit vraie. Or, cette dernière est évidente : si n est un entier pair, alors n^2 également, donc $n^2 - 1$ est un entier impair qui ne peut sûrement pas être divisible par 8. Les propositions sont donc bien équivalentes.

Exercice 3

1. On a bien sûr envie d'élever au carré des deux côtés de l'équation, mais attention, il faut d'abord préciser qu'on ne peut le faire que lorsque les deux racines carrées sont définies (et donc positives), soit lorsque $x \geqslant 32$. Autrement dit, $\forall x \geqslant \dfrac{3}{2}$, $\sqrt{x - 1} \geqslant \sqrt{2x - 3} \Rightarrow x - 1 \geqslant 2x - 3 \Leftrightarrow x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$. Finalement, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
2. Là encore, il est indispensable de commencer par préciser qu'on va résoudre l'équation sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ (pour que les deux ln soient bien définis), et c'est seulement sous cette condition qu'on peut regrouper nos ln pour obtenir l'équation équivalente $\ln((x+1)(x+5)) = \ln(96)$, soit $x^2 + 6x + 5 = 96$, ou encore $x^2 + 6x - 91 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 36 + 4 \times 91 = 400 = 20^2$, et admet donc pour solutions $x_1 = \dfrac{-6 - 20}{2} = -13$ et $x_2 = \dfrac{-6 + 20}{2} = 7$. La première solution étant largement inférieure à -1, on l'élimine sans remords, et on conserve donc $\mathcal{S} = \{7\}$.
3. On commence par constater que $x = 1$ est solution évidente de l'équation : $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. On peut donc factoriser son membre de droite sous la forme $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Une identification des coefficients dans les deux expressions donne $a = 1$, $b - 1 = -6$, donc $b = -5$, puis $c - b = 11$ donc $c = 6$, ce qui est cohérent avec la dernière équation. Notre équation initiale est donc équivalente à

$(x-1)(x^2-5x+6)=0$. Le discriminant du deuxième facteur vaut $\Delta = 25-24 = 1$, il admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$.

4. Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés. Notre équation est donc vérifiée dans deux cas : si $x^2+3x-2 = x^2-x-2$, qui est trivialement équivalente à $x=0$, ou si $x^2+3x-2 = -x^2+x+2$, équivalente à $2x^2+2x-4=0$, ou encore en simplifiant par 2, $x^2+x-2=0$. Cette dernière équation a pour solution évidente $x=1$, et le produit de ses deux solutions est égal à -2, donc la dernière solution est égale à -2. Finalement, $\mathcal{S} = \{-2, 0, 1\}$.