Devoir Maison n° 13 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 juin 2023

Problème 1

A. $\mathbb{Z}$-bases du réseau.

I. C'est évidemment trivial, si $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors $(x, y) = xe_1 + ye_2$, et cette décomposition est unique car (e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. De plus, par définition de $\mathcal{R}$, x et y sont des entiers, ce qui prouve bien que (e_1, e_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II.

1. Il suffit d'effectuer le calcul du produit matriciel pour obtenir $X = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$, ce qui correspond exactement à dire que $X = xe'_1 + ye'_2$.
2. (a) Par définition, e'_1 et e'_2 doivent être des vecteurs appartenant à $\mathcal{R}$, cette question atteint donc un record du monde de trivialité.
   (b) En effet, e_1 et e_2 étant assez manifestement des éléments de $\mathcal{R}$, on doit pouvoir les écrire comme combinaisons linéaires à coefficients entiers de e'_1 et de e'_2.
   (c) Les conditions $x_1e'_1 + y_1e'_2 = e_1$ et $x_2e'_1 + y_2e'_2 = e_2$ se traduisent par les quatre équations $a_1x_1 + a_2y_1 = 1$, $b_1x_1 + b_2y_1 = 0$, $a_1x_2 + a_2y_2 = 0$ et $b_1x_2 + b_2y_2 = 1$. Ça tombe particulièrement bien, puisques ce sont les mêmes équations qui permettent d'affirmer que $AB = I_2$.
   (d) La matrice B étant à coefficients entiers, tout comme la matrice A, leurs déterminants sont entiers. Or, d'après la question précédente, $\det(A)\det(B) = 1$, ce qui ne peut se produire que si $\det(A) \in \{-1, 1\}$ (et de même pour $\det(B)$).
3. (a) Puisque $\det(A) \neq 0$, A est certainement une matrice inversible. De plus, $\dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, donc la formule explicite $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ montre que A^{-1} est une matrice à coefficients entiers.
   (b) En reprenant le calcul de la question 2.c à l'envers, on déduit de la question précédente que $e_1 = x_1e'_1 + y_1e'_2$ et $e_2 = x_2e'_1 + y_2e'_2$, dont les deux vecteurs de la base canonique sont combinaisons linéaires à coefficients entiers de e'_1 et de e'_2, et tous les vecteurs de $\mathcal{R}$ le sont donc également (puisqu'ils sont eux-même combinaisons entières de e_1 et de e_2). La famille (e'_1, e'_2) est donc bien une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.
4. On a brillamment prouvé qu'une famille (e'_1, e'_2) était une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si et seulement si la matrice de ses coordonnées (autrement dit la matrice de notre famille dans la base canonique) était une matrice à coefficients entiers, de déterminant égal à 1 ou -1. Cette caracétrisation resterait d'ailleurs valable dans un espace vectoriel de dimension n.

III.

1. Les calculs de la partie II. prouvent l'existence de deux entiers x_1 et x_2 tels que $x_1a_1 + x_2b_1 = 1$. Le théorème de Bézout affirme alors que les deux entiers a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Puisque a_1 et b_1 sont premier entre eux, le théorème de Bézout (encore lui, mais dans l'autre sens) affirme l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $a_1u + b_1v = 1$. Posons donc $e'_2 = \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$. On sait alors que $ue'_1 + b_1e'_2 = e_1$ (la première coordonnée vaut $ua_1 + b_1v$ qui est égal à 1 par hypothèse, et la deuxième vaut $ub_1 - b_1u = 0$). De même, $ve'_1 - a_1e'_2 = e_2$. Les deux vecteurs de la base canonique sont donc combinaisons linéaires à coefficients entiers de e'_1 et e'_2, ce qui prouve que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.
3. Il suffit de trouver une combinaison de Bézout pour les entiers 7 et 10, ce qui est particulièrement difficile. Par exemple, $3 \times 7 - 2 \times 10 = 1$, ce qui prouve d'après la question précédente que le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ convient. Les plus curieux constateront qu'il existe en fait une infinité de vecteurs convenables, de la forme $\begin{pmatrix} -2+7k \\ -3+10k \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

B. Transformations linéaires du réseau.

I. Si $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, les images par f des deux vecteurs e_1 et e_2 ont des coordonnées entières. Or, ces coordonnées sont justement par définition les quatre coefficients de la matrice A, qui sont donc des entiers. Réciproquement, si les coefficients de la matrice sont entiers, cela signifie de même que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont des éléments de $\mathcal{R}$. Or, tout vecteur de $\mathcal{R}$ étant combinaison linéaire à coefficients entiers de e_1 et e_2, la linéarité de f assure que son image sera combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$, et appartiendra donc également à $\mathcal{R}$, ce qui prouve bien que $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

II.

1. Elle contient par exemple e_1 et e_2 qui sont certainement linéairement indépendants.
2. La dimension de l'image de f est au moins égale à 2, donc égale à 2 puisque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^2$. L'application f est donc un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^2$, il est bijectif.
3. L'application f étant supposée bijective, cela découle immédiatement du fait que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.
4. La matrice A est inversible en tant que matrice d'une application linéaire bijective, et son inverse A^{-1} est la matrice dans la base canonique de l'application f^{-1}, qui vérifie d'après la question précédente $f^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. D'après la question I, les coefficients de A^{-1} sont donc entiers.
5. On n'a pas déjà fait cette question ? Les déterminants de A et de A^{-1} sont entiers et inverses l'un de l'autre donc égaux tous les deux à 1 ou -1.

III.

1. C'est exactement la question II.3.b de la partie A, que nous allons donc nous dispenser de refaire.
2. On sait déjà que $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ puisque A est à coefficients entiers. De plus, tout élément de $\mathcal{R}$ étant combinaison linéaire à coefficients entiers de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ d'après la question précédente, il appartient à $f(\mathcal{R})$ (il est l'image de la combinaison linéaire correspondante de e_1 et e_2), donc $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. On a brillamment prouvé qu'une application linéaire conservait le réseau $\mathcal{R}$ si et seulement si sa matrice dans la base canonique était à coefficients entiers et de déterminant 1 ou -1.

C. Isométries du réseau.

I. La composée de deux isométries affines est une isométrie affine, et si chacune des deux isométries laisse le réseau $\mathcal{R}$ stable, ce sera aussi le cas de leur composée. De plus, tout isométrie affine est une bijection dont la réciproque est une isométrie affine, et là encore le fait d'avoir $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ implique que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Enfin, l'identité appartient évidemment à G et sera l'élément neutre du groupe. Le fait que G_0 est un sous-groupe de G est assez évident, il contient l'identité et les stabilités par composition et passage à l'inverse sont immédiates.

II.

1. Il faut donc trouver tous les couples d'entiers (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 = 1$. Cela ne peut se produire que si l'un des carrés est nul et l'autre égal à 1 (puique ces carrés sont eux-même entiers), ce qui laisse quatre possibilités : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Puisque $f(O) = O$ et que f est une isométrie, $f(e_1)$ doit être à distance 1 de O et de même pour $f(e_2)$, le résultat demandé découle alors trivialement de la question précédente.
3. Les deux colonnes de la matrice A doivent être constituées de deux vecteurs de la liste obtenue à la question précédente. Mais ces deux vecteurs doivent aussi être à une distance $\sqrt{2}$ l'un de l'autre (puisque c'est le distance entre e_1 et e_2 et que A est une matrice d'isométrie). Ils ne peuvent donc pas avoir la même coordonnée nulle (sinon la distance serait soit égale à 0 soit à 2), ce qui laisse exactement les huit possibilités données, pour lesquelles la distance entre les deux images est toujours égale à $\sqrt{2}$.

III.

1. La matrice de s_1 ayant pour déterminant -1, il s'agit d'une réflexion, en l'occurrence celle qui échange les deux vecteurs de la base canonique, donc une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$. La matrice A_2 a également pour déterminant -1, donc s_2 est aussi une réflexion. Puisque le vecteur e_2 est laissé stable par s_2, il s'agit de la réflection par rapport à l'axe (Oy) du repère canonique.
2. On va obtenir des rotations, le calcul de la matrice donnera rapidement l'angle correspondant : $A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et $A_2 \times A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (le centre étant O pour chacune des deux puisqu'il s'agit de rotations vectorielles).
3. On l'a déjà montré puisque les deux matrices A_1 et A_2 appartiennent à l'ensemble H.
4. La présence de cette question laisse entendre que la réponse à la précédente ne devrait pas être considérée comme triviale. Pourtant, elle l'est bel et bien !

IV. En reprenant les huit matrices de l'ensemble G_0, on voit que ce dernier est constitué de quatre rotations : id (première matrice), rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (sixième matrice), rotation d'angle π (donc $-$ id, quatrième matrice) et rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (septième matrice) ; et de quatre réflexions : par rapport à l'axe (Ox) (troisième matrice), par rapport à l'axe (Oy) (donc s_2, deuxième matrice), par rapport à la droite d'équation $y = x$ (donc s_1, cinquième matrice), et par rapport à la droite d'équation $y = -x$ (dernière matrice, l'opposé de s_1).

V. Si x et y ne sont pas tous les deux entiers, O a une image n'appartenant pas à $\mathcal{R}$ donc la translation ne peut pas appartenir à G. Réciproquement, si x et y sont entiers, on a, quel que soit le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{R}$, son image par f qui est égale à $\begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix}$ qui appartient aussi à $\mathcal{R}$, donc $t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Mais la réciproque est tout aussi évidente dans ce cas, et t étant une isométrie, on a donc bien $t \in G$.

VI. Comme t' est une translation dont le vecteur appartient à $\mathcal{R}$, $t' \in G$, donc $g \in G$. De plus, par construction, $g(O) = f(O) - f(O) = O$ donc $g \in G_0$.

VII. Il suffit de poser $t = (t')^{-1}$ avec les notations de la question précédentes pour prouver l'existence. L'unicité est triviale : comme O doit être laissé fixe par g, t est nécessairement la translation de vecteur $f(O)$, donc $g = t' \circ f$.

D. Un pavage du plan.

I.

1. Il suffit de tracer les huit triangles obtenus en appliquant chacune des huit isométries décrites plus haut, et de constater qu'on obtient, pour chacun des quatre carrés de côté $\frac{1}{2}$ ayant une diagonale passant par O et l'un des quatre sommets du carré C, deux triangles séparant le petit carré suivant cette diagonale, chacun de ces deux triangles étant l'image de T par l'une des huit isométries. Ainsi, pour le petit carré ayant pour sommet $(1, 1)$, les deux triangles sont T lui-même (donc l'image de T par l'identité) et son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$, donc $s_1(T)$. Pour le petit carré ayant pour sommet $(-1, 1)$, il est recouvert par les deux triangles $s_1(T)$ (symétrique par rapport à (Oy)) et $r(T)$, où r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. On obtient les deux derniers petits carrés tout aussi facilement.
2. Tous ces triangles ont évidemment le point O en commun. Vu la description faite à la question précédente, ils peuvent également avoir une intersection qui est la diagonale d'un petit carré s'ils correspondent aux deux moitiés dudit petit carré (par exemple T et $s_1(T)$ ont pour intersection le segment reliant O et le point de coordonnnées $(1, 1)$). Enfin, les petits carrés ayant eux-même une intersection qui est un segment situé sur un des deux axes du repère canonique, on peut aussi avoir ce segment comme intersection, par exemple pour T et son symétrique par rapport à (Ox).

II.

1. Soit (x, y) les coordonnées d'un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. En notant n l'entier le plus proche de x (pas nécessairement la partie entière de x donc, mais cette partie entière si $x \leqslant \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, ou $\lfloor x \rfloor + 1$ dans le cas contraire ; si la distance entre x et sa partie entière vaut exactement $\frac{1}{2}$, on a le choix entre les deux valeurs), et p l'entier le plus proche de y, on aura par construction le point (x, y) appartenant au carré de centre (n, p) et de côté 1. Or, ce carré est exactement l'image de C par la translation de vecteur (n, p), avec $(n, p) \in \mathcal{R}$. De plus, le point (x, y) appartient à plusieurs de ces translatés si et seulement si la partie fractionnaire de x ou celle de y (voire les deux, dans ce cas (x, y) sera un coin commun à quatre des carrés translatés) est égale à $\frac{1}{2}$.
2. La description précédente montre que l'intersection de deux de ces carrés se fait soit suivant un segment correspondant au côté commun à deux carrés, soit en un point commun à quatre carrés. Elle peut évidemment être vide si les valeurs de (n, p) correspondant aux deux carrés sont trop éloignées. En pratique, on aura une intersection entre « le carre (n, p) » et « le carré (n', p') » qui est un segment si $n = n'$ et $n = p' \pm 1$ (segment horizontal dans ce cas) ou si $n = n' \pm 1$ et $p = p'$ (segment vertical), un point si $n = n' \pm 1$ et $p = p' \pm 1$, et vide dans tous les autres cas.

III.

1. Cela découle immédiatement des questions précédentes. Si (x, y) est un point quelconque de $\mathbb{R}^2$, il appartient à $t(C)$ pour un certain $t \in G$ (question II.1), et le point de C antécédent de (x, y) par la translation t est lui-même de la forme $g(A)$ avec $A \in T$ et $g \in G_0$ (question I.1), donc $(x, y) = t \circ g(A) = f(A)$ avec $f \in G$, d'où la conclusion proposée.
2. Puisque toute application $f \in G$ peut s'écrire de façon unique $t \circ g$ (question C.VII), le résultat découle à nouveau immédiatement des questions précédentes.

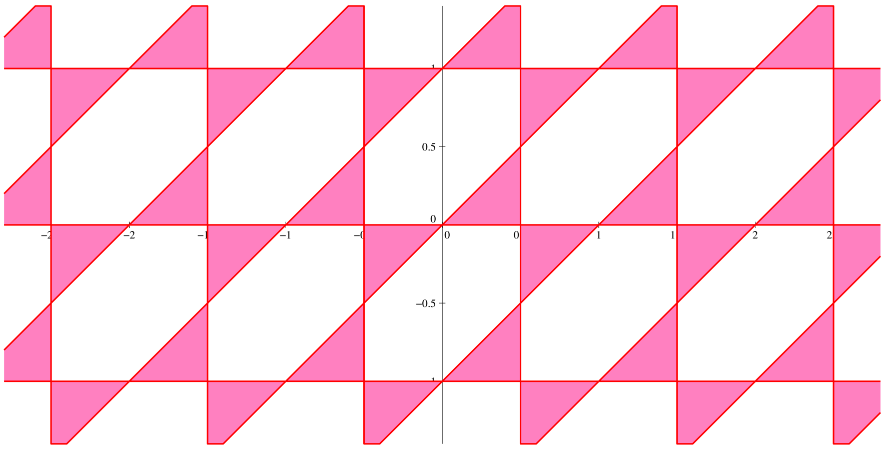
E. Un sous-groupe et deux frises.

I.

1. L'application t_k est la translation de vecteur ke_1. L'application s_k est la composée de cette même translation avec la rotation d'angle π autour de l'origine (ou si on préfère la symétrie centrale centrée en O). Attention, on effectue dans ce cas la rotation avant la translation (ça ne commute pas !).
2. Commençons par le plus simple : $t_k \circ t_l = t_{k+l}$, j'espère qu'il n'y a pas besoin d'explication. Un peu moins évident, $s_k \circ s_l = t_{k-l}$: on symétrise, on avance de l sur l'axe des abscisses, ce qui revient en fait à reculer de l, puis on symétrise à nouveau et on avance de k, cela revient bien à avoir avancé de $k-l$. Si vous n'êtes pas convaincu, on compose simplement les applications : $s_k \circ s_l(x,y) = s_k(-x+l,-y) = (-(-x+l)+k, -(-y)) = (x-l+k, y)$. De même, on obtient $s_k \circ t_l = s_{k+l}$ et $t_k \circ s_l = s_{l-k}$.

II. La question précédente prouve que l'ensemble est stable par composition. Il contient la translation identité (qui est égale à t_0) et toutes les réciproques des applications de H : $t_k^{-1} = t_{-k}$ et $s_k^{-1} = s_k$ (ce qui découle d'ailleurs aussi des calculs de la question précédente !).

III. L'ensemble F contient tous les translatés par des translations à coordonnées entières du triangle T, le symétrique de T par rapport à O et tous les translatés à coordonnées entières de ce dernier. Mais un bon dessin vaudra mieux que de longs discours :



IV. Il s'agit du sous-groupe constitué de toutes les translations à coordonnées entières, des quatre rotations appartenant à G_0, ainsi que des composées de ces quatre rotations par les translations précédentes. Il s'agit en fait du sous-groupe constitué par toutes les isométries directes appartenant à G (qui est un sous-groupe de façon triviale).

Problème 2

I.

1. Si on se retreint aux fonctions continues il n'y en a pas des masses. La fonction $x \mapsto -x$ convient trivialement.
2. Là aussi, il n'y en a pas beaucoup de simples, mais on peut bien sûr prendre $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3. C'est trivial, f est par définition sa propre réciproque, donc bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les deux conditions données ci-dessus.

1. Si on applique la relation vérifiée par f à $x = 1$ et $y = y_1$ on obtient $f(f(y_1)) = y_1 f(1)$. Mais de même, en posant cette fois $y = y_2$, on aura $f(f(y_2)) = y_2 f(1)$. Comme $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$, l'égalité demandée en découle.
2. Comme $f(1)$ ne peut pas être nulle, on peut simplifier l'égalité précédente pour en déduire que $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$. C'est la définition de l'injectivité.
3. On applique la relation avec $x = y = 1$ pour obtenir $f(f(1)) = f(1)$. L'application f étant injective, le fait que 1 et $f(1)$ aient la même image assure que $f(1) = 1$.
4. On applique la relation avec $x = 1$ et y quelconque pour obtenir $f(f(y)) = y$, ce qui est la définition d'une involution.
5. Posons donc $y = f(b)$ et $x = a$ pour obtenir $f(af(f(b))) = f(b)f(a)$. Comme f est involutive, $f(f(b)) = b$ et l'égalité demandée en découle.

III.

1. D'après la question $II.5$, on a $f(xf(x)) = f(x)f(f(x)) = f(x)x$ (car f est involutive), donc $xf(x)$ est toujours un point fixe de f.
2. Oui, on l'a déjà prouvé plus haut.
3. Si $f(x) = x$ et $f(y) = y$ alors $f(xy) = f(x)f(y) = xy$, d'où la stabilité par produit. De même $x = f(x) = f\left(\frac{x}{y} \times y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$, donc $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}$.
4. C'est une récurrence triviale découlant de la stabilité de F par produit (et du fait que $1 \in F$ pour l'initialisation).
5. S'il existait un point fixe de F strictement supérieur à 1, la question précédente permettrait d'en construire une infinité de valeurs tendant vers $+\infty$, ce qui contredit évidemment l'hypothèse que f est bornée.
6. S'il existe un point fixe strictement inférieur à 1, alors $\frac{1}{y} \in F$ d'après la question 3, et c'est impossible d'après la question précédente puisque $\frac{1}{y} > 1$. Le seul point fixe de f est donc égal à 1.
7. Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 1$, donc $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont inverses l'un de l'autre. De plus, l'égalité $f(ab) = f(a)f(b)$ permet de prouver par récurrence triviale que $f(x^n) = (f(x))^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Si $f(x) > 1$, on pourra donc trouver des valeurs de f tendant vers $+\infty$, ce qui contredit le caractère borné de la fonction. On en déduit que f est majorée par 1. Mais alors le fait que $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ soient inverses l'un de l'autre implique qu'ils sont tous les deux égaux à 1. La fonction f est donc simplement constante égale à 1. Mais comme on a prouvé il y a un certain temps que f était injective, ça ne laisse aucune fonction valable.

IV. On vient de le dire, il n'y en a pas. Ce problème, improbable mélange de questions complètement triviales et de questions déjà posées, est hélas assez représentatif de ce qu'on demande de nos jours au CAPES de maths...