Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 13

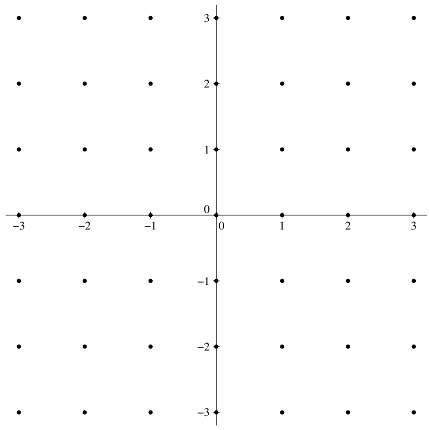
MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 20 juin 2023

Ce dernier devoir à la maison de l'année est constitué de l'intégralité de la première épreuve d'admissibilité au CAPES de mathématiques 2017. Il s'agit d'une épreuve de 5 heures à laquelle avoir une note en-dessous de 5 est éliminatoire. Comme ça, vous pourrez vous rendre compte que vous avez déjà le niveau pour devenir prof de maths (un beau métier s'il en est).

Problème 1

Dans ce problèmes, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont présentés sous forme de vecteurs-colonnes. On note en particulier $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On appelle réseau l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, noté $\mathcal{R}$ dans la suite du problème. Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau $\mathcal{R}$:



A. $\mathbb{Z}$-bases du réseau.

Une famille $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si $(e'_1, e'_2) \in \mathcal{R}^2$, et si tout élément $X \in \mathcal{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $X = ae'_1 + be'_2$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

I. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et x, y deux réels, montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si et seulement si $X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.
   (a) Montrer que $(a_2, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.
   (b) Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $x_1e'_1 + y_1e'_2 = e_1$ et $x_2e'_1 + y_2e'_2 = e_2$.
   (c) Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.
   (d) En déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
3. On suppose dans cette question que $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(a) Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

(b) Montrer que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

4. Conclure.

III. Soit $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{R}$.

1. Montrer que si e'_1 est le premier vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.
2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur $e'_2 \in \mathcal{R}$ tel que (e'_1, e'_2) soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.
3. Donner une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

B. Transformations linéaires du réseau.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, sa matrice dans la base canonique est notée A.

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ si et seulement si tous les coefficients de A sont entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.
2. En déduire que f est surjective, puis bijective.
3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.
4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.
5. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

1. En utilisant les résultats de la partie A., montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.
2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

C. Isométries du réseau.

Soit G l'ensemble des isométries affines f de $\mathbb{R}^2$ telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et G_0 l'ensemble des éléments de G vérifiant $f(O) = O$.

I. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe, et que G_0 est un sous-groupe de G.

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie B. s'appliquent. On note toujours A la matrice de f dans la base canonique.

1. Déterminer tous les points X de $\mathcal{R}$ situés à une distance 1 de O.
2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base canonique $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et de s_2.
2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.
3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0.

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire appartient à H, alors $f \in G_0$.

IV. Donner tous les éléments de G_0.

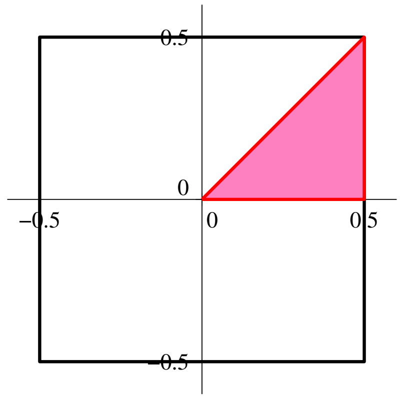
V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f \in G_0$.

VII. Montrer que tout élément $f \in G$ s'écrit de façon unique $f = t \circ g$ avec $g \in G_0$ et t une translation de vecteur dans $\mathcal{R}$.

D. Un pavage du plan.

On note T la surface délimitée par le triangle de sommets $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On note C la surface délimitée par le carré de sommets $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



I. 1. Justifier que $C = \bigcup_{g \in G_0} g(T)$.

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0, alors $g_1(T) \cap g_2(T)$ est un point ou un segment.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X.

1. Justifier que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C)$.
2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de $\mathcal{R}$, l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T)$.

2. Montrer que, si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G, alors $f_1(T) \cap f_2(T)$ est un segment, un point, ou l'ensemble vide.

E. Un sous-groupe et deux frises.

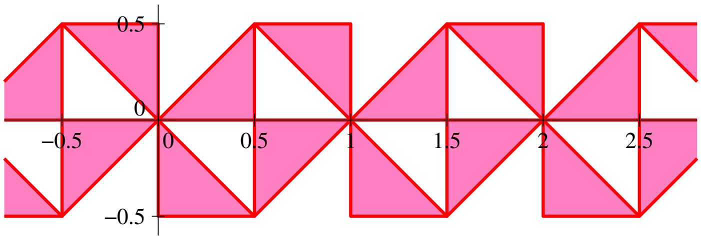
I. Soit k un entier relatif, on considère les applications $t_k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix}$ et $s_k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et de s_k ?
2. Soient k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$ et $t_k \circ t_l$.

II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

III. On considère l'ensemble $F = \bigcup_{f \in H} f(T)$, où T est le triangle défini en partie D. Décrire l'ensemble F.

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupes des isométries conservant cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

Problème 2

Dans ce problème, on cherche à déterminer toutes les applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Pour tous nombres strictement positifs x et y, $f(xf(y)) = yf(x)$.
- f est bornée sur $]1, +\infty[$.

I. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application définie sur I et à valeurs dans I. On dit que φ est une involution de I si, $\forall x \in I$, $\varphi(\varphi(x)) = x$.

1. Donner un exemple d'involution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ autre que l'identité.
2. Donner un exemple d'involution de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ autre que l'identité.
3. Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les deux conditions données ci-dessus.

1. Soient deux nombres strictement positifs y_1, y_2 tels que $f(y_1) = f(y_2)$, montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.
4. Montrer que f est une involution de $]0, +\infty[$.
5. Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$ (indication : on pourra poser $y = f(b)$).

III. On note F l'ensemble des points fixes de F : $F = \{x \in]0, +\infty[, f(x) = x\}$.

1. Montrer que, $\forall x \in]0, +\infty[$, $xf(x) \in F$.
2. Montrer que $1 \in F$.
3. Montrer que, si x et y sont des élements de F, alors $xy \in F$ et $\dfrac{x}{y} \in F$.
4. Montrer que, si $x \in F$, alors $x^n \in F$ pour tout entier naturel n.
5. Montrer que, si $x \in F$, alors $x \leqslant 1$ (indication : on pourra considérer la suite (x^n)).
6. Montrer que $F = \{1\}$.
7. En déduire f.

IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.