Devoir Maison n^o 12 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

29 mai 2023

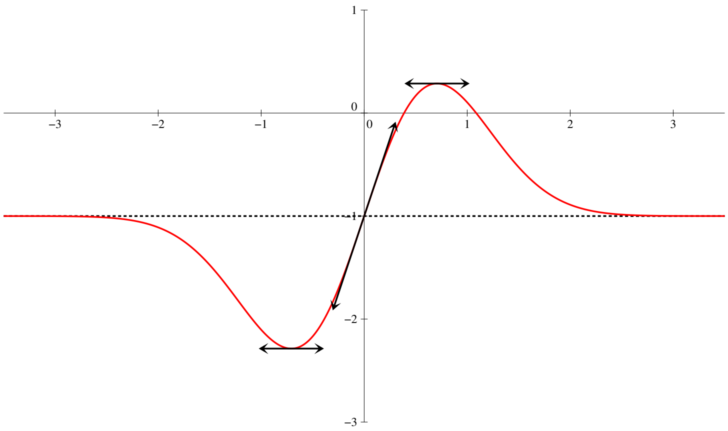
Problème 1 : analyse.

I. Étude d'une fonction.

1. La fonction f est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$, qui est du signe de $1-2x^2$. Cette dérivée s'annule pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Les valeurs correspondantes ne sont pas spécialement agréables : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{2e}} - 1$, et de même $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{2e}} - 1$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ (croissance comparée, on peut poser $X = \sqrt{|x|}$ si on veut vraiment appliquer ultra rigoureusement le résultat du cours), donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$. La courbe admet donc une symptote horizontale d'équation $y = -1$ en $+\infty$ comme en $-\infty$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & +\infty \\
\hline
 & & & & & \frac{3}{\sqrt{2e}} - 1 & & \\
f & -1 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & -1 \\
 & & & \frac{3}{\sqrt{2e}} - 1 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

2. La fonction f' est elle-même dérivable, et $f''(x) = -6xe^{-x^2} - 12xe^{-x^2} + 12x^3e^{-x^2} = 6x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule et change de signe en 0, ce qui signifie que la courbe y admet un point d'inflexion.
3. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, la tangente demandée a pour équation $y = 3x - 1$. La position relative est donnée par le signe de $f(x) - (3x-1) = 3xe^{-x^2} - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$. Comme $-x^2$ est un réel négatif, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$ et notre différence a donc un signe opposé à celui de x. La courbe est donc au-dessus de sa tangente sur $]-\infty, 0]$ et en-dessous sur $[0, +\infty[$, ce qui confirme la présence d'un point d'inflexion en 0.
4. Les valeurs numériques données en début d'exercice permettent de calculer $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$, et $\dfrac{3}{\sqrt{2e}} \simeq 2.1 \times 0.6 \simeq 1.3$. On indique bien sûr sur notre courbe l'asymptote horizontale ainsi que la tangente étudiée dans les questions précédentes :



5. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc admet des développements limités à tout ordre en tout point.

   (b) On pose $u = -x^2$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0, et on applique le développement de l'exponentielle, en se contentant de l'ordre 2 puisque $u^3 = -x^6 = o(x^5)$. On a donc $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$, puis $f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^6)$.

II. Étude d'une équation différentielle.

1. Sur les intervalles imposés, (H_n) est équivalente à l'équation normalisée $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right) y = 0$. La fonction $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ est continue et admet des primitives sur les intervalles de résolution. Sur $]0, +\infty[$, on peut par exemple poser $A(x) = n\ln(x) - x^2$, et en déduire que les solutions de (H_n) seront toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{n\ln(x)-x^2} = Kx^n e^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Sur $]-\infty, 0[$, on pose plutôt $A(x) = n\ln(-x) - x^2$, ce qui ne change rien à la forme des solutions (quitte à changer le signe de la constante) : $y_h(x) = Lx^n e^{-x^2}$ avec $L \in \mathbb{R}$.
2. Inutile de s'embêter avec la variation de la constante pour obtenir une solution particulière, la fonction constante égale à -1 est trivialement solution de (E_n). Les solutions de l'équation sont donc toutes les fonction de la forme $y_+ : x \mapsto Kx^n e^{-x^2} - 1$ (sur $]0, +\infty[$) et $y_- : x \mapsto Lx^n e^{-x^2} - 1$ (sur $]-\infty, 0[$).
3. On cherche à recoller les fonctions y_+ et y_- en 0 de façon à obtenir des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Déjà, $\lim\limits_{x\to 0^+} y_+(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y_-(x) = -1$, ce qui assure la continuité d'éventuels recollements. De plus, $y_+'(x) = nKx^{n-1}e^{-x^2} - 2Kx^{n+1}e^{-x^2}$ (formule identique à la constante près pour y_-'). Si $n \geqslant 2$, les dérivées des deux fonctions ont une limite nulle en 0^+ et en 0^- et le recollement est donc de classe $\mathcal{C}^1$ quelles que soient les valeurs des constantes. Autrement dit, toute fonction définie par $y(x) = Kx^n e^{-x^2} - 1$ sur $[0, +\infty[$ et par $y(x) = Lx^n e^{-x^2} - 1$ sur $]-\infty, 0[$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par contre, pour $n = 1$, on constate que $\lim\limits_{x\to 0^+} y_+'(x) = K$, et de même $\lim\limits_{x\to 0^-} y_-'(x) = L$, ce qui impose la condition $K = L$ pour avoir une dérivée continue en 0. Les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ sont alors toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Kxe^{-x^2} - 1$.

III. Étude de deux suites.

1. Ah, une question triviale : $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$ (puisque $e < 3$).
2. La fonction f_n est dérivable, et $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$, qui s'annule en $\pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. Sur l'intervalle imposé pour l'étude, f_n est donc croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et décroissante ensuite, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -1$ (croissance comparée). En notant α la maximum

de f atteint en $\sqrt{\frac{n}{2}}$ (maximum qui est strictement positif et même supérieur à $f_n(1)$), la fonction f_n est donc bijective de $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ vers $[-1, \alpha]$ puis de $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ vers $]-1, \alpha]$. Comme 0 est compris entre -1 et α, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc bien deux solutions, la plus petite (notée u_n) inférieure à 1 car $f_n(1) > 0$, et la plus grande supérieure à $\sqrt{\frac{n}{2}}$ et a fortiori supérieure à 1.

3. On vient de signaler que $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$, donc $\lim v_n = +\infty$.

4. (a) Par définition, $f_n(u_n) = 0$, donc $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$, ou encore $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

   (b) En utilisant ce qui précède, $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$ donc $f_{n+1}(u_n) < 0$.

   (c) Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par définition, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$, et la croissance de f_{n+1} sur l'intervalle $[0, 1]$ auquel appartiennent u_n et u_{n+1} permet de conclure que $u_{n+1} > u_n$, et donc que (u_n) est une suite strictement croissante.

   (d) Puisque (u_n) est croissante et majorée par 1, elle converge.

5. (a) C'est un calcul trivial : $g_n(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(3t^n) = x^2 \Leftrightarrow 3t^n = e^{t^2} \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2} = 1$.

   (b) Supposons donc que $l \neq 1$. Les réels u_n vérifient d'après la question précédente $n\ln(u_n) = u_n^2 - \ln(3)$. Or, $\lim u_n^2 - \ln(3) = l^2 - \ln(3)$, et avec l'hypothèse faite, $\lim \ln(u_n) = \ln(l) < 0$ (la limite l appartient nécessairement à l'intervalle $[0, 1]$), ce qui implique $\lim n\ln(u_n) = -\infty$. On a une contradiction flagrante qui prouve donc que $l = 1$.

   (c) Puisque $\lim u_n = 1$, $\lim w_n = 0$. On peut donc écrire $g_n(1 + w_n) = \ln(3) + n\ln(1 + w_n) - (1+w_n)^2 = \ln(3) + nw_n + o(nw_n) - 1 - 2w_n - o(w_n) = \ln(3) - 1 + nw_n + o(1)$. Comme on sait que $g_n(u_n) = 0$, on doit donc avoir $\lim \ln(3) - 1 + nw_n = 0$, c'est-à-dire $w_n \sim \frac{1 - \ln(3)}{n}$.

Problème 2 : algèbre.

I. Étude d'un polynôme.

1. (a) On cherche ces racines sous forme algébrique en posant $z = a + ib$. On aura $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 3 - 4i$, ce qui se traduit par les deux équations $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = -4$. On ajoute comme d'habitude une équation obtenue à l'aide du module : $|z|^2 = a^2 + b^2 = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En faisant somme et différence de cette équation avec celle obtenue pour la partie réelle, on a $2a^2 = 8$ (donc $a = \pm 2$) et $2b^2 = 2$ (donc $b = \pm 1$). Les réels a et b étant de signe contraire (dernière équation), les deux racines carrées recherchées sont $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -2 + i$.

   (b) Le polynôme a pour discriminant $\Delta = (1 - 2i)^2 + 8i = 1 - 4i - 4 + 8i = -3 + 4i$. On se demande un peu pourquoi on nous a demandé de calculer les racines de l'opposé de ce discriminant à la première question, mais on déduit facilement que les racines de Δ sont $\delta_1 = iz_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = iz_2 = -1 - 2i$. Les racines de U sont donc les complexes $\frac{-1 + 2i + 1 + 2i}{2} = 2i$ et $\frac{-1 + 2i - 1 - 2i}{2} = -1$. Oui, on pouvait aussi voir -1 comme une racine évidente pour s'épargner un peu de calcul.

2. (a) Calculons : $U(x+iy) = (x+iy)^2 + (1-2i)(x+iy) - 2i = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy - 2ix + 2y - 2i$, ce qui donne pour partie réelle $x^2 - y^2 + x + 2y$ et pour partie imaginaire $2xy + y - 2x - 2$.

   (b) L'ensemble Γ_1 a donc pour équation $x^2 - y^2 + x + 2y = 0$. S'il y avait un signe + à la place du $-$, on reconnaitrait une équation de cercle, là il s'agit en fait d'une hyperbole. On peut la mettre sous la forme canonique $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 1)^2 = -\frac{3}{4}$, mais on ne dispose pas ensuite des outils permettant de tracer facilement la courbe à partir de cette équation. De même, Γ_2 a pour équation $2xy + y - 2x - 2 = 0$, qui est aussi une équation d'hyperbole. On peut écrire l'équation sous la forme $(2x+1)(y-1) = 1$ et, quitte à faire une espèce de changement de variables en posant $X = 2x+1$ et $Y = y-1$, se ramener à l'équation classique $XY = 1$ (là vous devriez savoir que c'est une hyperbole !), mais là encore on ne saura pas vraiment en déduire l'allure de la courbe.

II. Définition d'une application.

1. Si P_1 et P_2 sont deux polynômes, on a par définition $P_1(X^2) = Q_1(X)T(X) + R_1(X)$ et $P_2(X^2) = Q_2(X)T(X) + R_2(X)$, en notant évidemment Q_1 et R_1 le quotient et le reste de la division de $P_1(X^2)$ par T (et de même pour Q_2 et R_2). On sait que le degré les polynômes R_1 et R_2 est strictement inférieur à n et que cette écriture est unique. On peut alors écrire, si λ est une constante complexe, $(\lambda P_1 + P_2)(X^2) = \lambda P_1(X^2) + P_2(X^2) = (\lambda Q_1 + Q_2)T + (\lambda R_1 + R_2)$. Dans la mesure où le degré du polynôme $\lambda R_1 + R_2$ reste strictement inférieur à n, l'unicité de la division euclidienne nous assure alors que $\lambda Q_1 + Q_2$ et $\lambda R_1 + R_2$ sont le quotient et le reste de la division de $\lambda P_1 + P_2$ par T. Autrement dit, on aura $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda Q_2 + Q_2 + X(\lambda R_1 + R_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$, ce qui prouve bien la linéarité de f.
2. La linéarité est conservée quand on effectue la restriction. De plus, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $d^\circ(P) \leqslant n$, donc $d^\circ(P(X^2)) \leqslant 2n$ (c'est une composition de polynômes). On en déduit que $d^\circ(QT) \leqslant 2n$, et comme T est supposé de degré exactement n, le quotient Q est donc de degré inférieur ou égal à n. Le reste X étant quant à lui de degré strictement inférieur à n, XR a également un degré maximal égal à n, et $f(P)$ est la somme de deux polynômes appartenant à $\mathcal{C}_n[X]$, ce qui prouve que f_n est bien à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$. Il s'agit donc bien d'un endomorphisme.
3. (a) Calculons les images des trois polynômes de la base canonique. Si $P(X) = 1$, $P(X^2) = 1$, donc $Q = 0$ et $R = 1$, puis $f_2(1) = X$. Pour $P = X$, $P(X^2) = X^2$, donc $Q = 1$ et $R = 0$ (pas besoin de détailler la division euclidienne ici !), d'où $f_2(X) = 1$. Enfin, si $P = X^2$, $P(X^2) = X^4$. Là encore la division est triviale, $Q = X^2$ et $R = 0$ donc $f_2(X^2) = X^2$. Il ne reste plus qu'à écrire la matrice correspondante en faisant attention de bien garder la base canonique dans le bon ordre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Un calcul d'une difficulté extrême permet d'obtenir $A^2 = I_3$. On en déduit que $f_2^2 = \mathrm{id}$, et donc que f_2 est une symétrie, application bijection égale à sa propre réciproque. Plus précisément, f_2 est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(X^2, X+1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X-1)$ (calculs qui n'étaient pas clairement demandés mais qui sont extrêmement faciles ici).
4. Il est inutile de faire des calculs compliqués si on est malin : les racines de U calculées plus haut montrent que $U(X) = (X-2i)(X+1)$, donc $U(X^2) = (X^2-2i)(X^2+1)$. On peut bien sûr factoriser le terme X^2+1 sous la forme $(X-i)(X+i)$, mais on peut aussi constater que $(1+i)^2 = 2i$, donc $X^2 - 2i = X^2 - (1+i)^2 + (X-1-i)(X+1+i)$. Autrement dit, $U(X^2) = (X-1-i)(X+1+i)(X-i)(X+i) = (X+1+i)(X-i)T$, donc la division euclidienne de $U(X^2)$ par T a un reste nul et un quotient égal à $(X+1+i)(X-i)$, et $f_2(U) = (X+1+i)(X-i) = X^2 + X + 1 - i$.

III. Étude d'un cas particulier.

1. Calculons les images des polynômes de la base canonique : si $P(X) = 1$, $P(X^2) = 1$, donc $Q = 0$ et $R = 1$ (avec comme précédemment les notations évidentes), ce qui donne $f_3(1) = X$, ce qui correspond bien à la première colonne de la matrice B. De même, si $P = X$, $P(X^2) = X^2$ et on a à nouveau un quotient nul, et cette fois-ci un reste égal à X^2 qui donne $f_3(X) = X^3$, c'est bien ce qu'on retrouve dans la deuxième colonne de la matrice B. Les deux derniers calculs seront plus intéressants. Si $P(X) = X^2$, $P(X^2) = X^4 = X(X^3 + X^2 + a) - X^3 - aX =$

$X(X^3+X^2+a)-(X^3+X^2+a)+X^2+a-aX = (X-1)(X^3+X^2+a)+X^2-aX+a$ (on pouvait bien sûr poser la division euclidienne de façon plus traditionnelle). On a donc $Q = X-1$ et $R = X^2-aX+a$, puis $f_3(X^2) = X-1+X^3-aX^2+aX = X^3-aX^2+(a+1)X-1$, ce qui correspond à la troisième colonne de la matrice B. Enfin, si $P(X) = X^3$, on a $P(X^2) = X^6$. On va vraiment écrire la division euclidienne cette fois-ci (si j'arrive à la faire tenir sur la ligne) :

$$\begin{array}{cccccccccccccc|c}
 & X^6 & & & & & & & & & & & & & X^3+X^2+a \\
- & (X^6 & + & X^5 & & & + & aX^3) & & & & & & & \overline{X^3-X^2+X-a-1} \\
 & & & -X^5 & & & - & aX^3 & & & & & & & \\
 & & - & (-X^5 & - & X^4 & & & - & aX^2) & & & & & \\
 & & & & & X^4 & - & aX^3 & + & aX^2 & & & & & \\
 & & & & - & (X^4 & + & X^3 & & & + & aX) & & & \\
 & & & & & & & (-a-1)X^3 & + & aX^2 & - & aX & & & \\
 & & & & & & + & ((a+1)X^3 & + & (a+1)X^2 & & & + & (a^2+a)) & \\
 & & & & & & & & & (2a+1)X^2 & - & aX & + & a^2+a &
\end{array}$$

On a donc $Q = X^3-X^2+X-a-1$ et $R = (2a+1)X^2-aX+a^2+a$, puis $f_3(X^3) = Q+XR = (2a+2)X^3-(a+1)X^2+(a^2+a+1)X-a-1$. Oh, incroyable, on a bien retrouvé les coefficients présents dans la quatrième colonne de la matrice B ! Cette question, il faut bien l'avouer, était particulièrement subtile...

2. Après avoir développé le déterminant suivant la deuxième colonne puis suivant la première colonne (attention au fait que le coefficient 1 de cette première colonne est en position « impaire »), on obtient $\det(B) = -\begin{vmatrix} -1 & -a-1 \\ -a & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1-(a^2+a)) = a^2-1$. Le déterminant de l'application f_3 étant par définition le même que celui de B, il vaut aussi a^2-1.

3. Le calcul précédent montre que l'application n'est pas bijective si $a^2-1=0$, donc pour $a=1$ ou $a=-1$. Si on n'a pas pu effectuer le calcul de déterminant, on fait un pivot de Gausse partiel sur la matrice B : de simples échanges de lignes amènent à la matrice équivalente par lignes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \\ 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \end{pmatrix}$. On effectue alors l'opération $L_4 \Leftarrow L_4 - aL_3$, ce qui annule le troisième coefficient de la ligne L_4 et modifie son dernier coefficient en $-a-1+a^2+a = a^2-1$. On a donc obtenue une matrice triangulaire supérieure ayant pour coefficients diagonaux 1, 1, -1 et a^2-1, ce qui permet de retrouver immédiatement le résultat obtenu grâce au déterminant.

4. (a) Dans ce cas particulier, on a donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme $P = aX^3 + bX^2+cX+d$ appartient donc au noyau de f_3 si $B \times \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0$, ce qui donne les quatre équations $-b=0$, $d+a=0$, $b=0$ et $c+b=0$, donc on déduit très facilement $b=c=0$ et $d=-a$. Autrement dit, $\ker(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3-1)$.

   (b) On peut déjà constater (théorème du rang) que $\dim(\mathrm{Im}(f_3)) = 3$. L'image est engendré par les colonnes de la matrice B, comme les deux colonnes extrêmes sont identiques, on a directement $\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X, X^3, X^3+X^2-1)$, et la famille obtenue qui contient trois vecteurs est une base de l'image.

(c) Il suffit de voir si l'unique vecteur formant une base du noyau appartient ou non à l'image. Supposons que $X^3 - 1 = \lambda_1 X + \lambda_2 X^3 + \lambda_3(X^3 + X^2 - 1)$. L'absence de terme en X^2 dans le membre de gauche impose déjà $\lambda_3 = 0$, donc $X^3 - 1 = \lambda_1 X + \lambda_2 X^3$, ce qui est clairement impossible. Image et noyau ont donc une intersection nulle et sont bel et bien supplémentaires dans $\mathbb{C}_3[X]$.

IV. Étude du noyau.

1. Comme déja signalé plus haut, si P est un polynôme de degré p, alors $P(X^2)$ aura pour degré $2p$. Si on suppose que le degré de $P(X^2)$ est strictement inférieur à celui de T, la division euclidienne sera très vite faite, on aura pour quotient $Q = 0$ et pour reste $R = P(X^2)$, donc $f(P) = XP(X^2)$, qui n'est pas nul par hypothèse.
2. Supposons donc que $P \in \ker(f)$, alors avec les notations de l'énoncé $Q + XR = 0$, donc $Q = -XR$, et comme $P(X^2) = QT + R$, on peut donc écrire $P(X^2) = -XRT + R = R(1 - XT)$, avec bien sûr $d^\circ(R) < n$ puisqu'il s'agit du reste d'une division euclidienne par un polynôme de degré n. Réciproquement, si on suppose que $P(X^2) = R(1 - XT)$, alors $P(X^2) = (-XR)T + R$, avec $d^\circ(R) < n$, qui est une division euclidienne de $P(X^2)$ par T. Par unicité de la division euclidienne, on a donc $Q = -XR$ et on en déduit que $f(P) = 0$.
3. Le polynôme $1 - XT$ a pour degré $n + 1$ et R est supposé de degré strictement inférieur à n, donc $d^\circ(R(1 - XT)) \leqslant 2n$. Si f appartient au noyau, la caractérisation précédente prouve que $d^\circ(P(X^2)) \leqslant 2n$, et donc que $d^\circ(P) \leqslant n$, c'est-à-dire que $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
4. Avec les hypothèses faites, on sait que $P(X^2) = R(1 - XT)$ pour un polynôme R de degré strictement inférieur à n. Mais alors $X^{2k}P(X^2) = X^{2k}R(1 - XT)$. Le dégré du polynôme $X^{2k}R$ vaut bien entendu $2k + d^\circ(R)$, mais on sait que $d^\circ(R) = 2d^\circ(P) - (n + 1)$, donc $X^{2k}R$ a pour degré $2(k + d^\circ(P)) - (n + 1) \leqslant 2n - (n + 1) = n - 1$ par hypothèse, donc le polynôme $X^k P$ vérifie la caréctarisation de la question 2 et appartient bien lui aussi au noyau.
5. (a) C'est évident, il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui est par hypothèse non vide, il a donc un plus petit élément.

   (b) On peut écrire (toujours en exploitant la question 2) que $P_0 = R_0(1 - XT)$ et $P_1 = R_1(1 - XT)$, avec R_0 et R_1 de même degré puisqu'on a supposé que P_0 et P_1 étaient tous les deux de degré d. En notant c le quotient des coefficients dominants de R_0 et de R_1, le polynôme $R_1 - cR_0$ est alors de degré strictement inférieur à celui de R_0. Mais comme $P_1 - cP_0 = (R_1 - cR_0)(1 - XT)$ est un polynôme du noyau de f qui a un degré strictement inférieur à d, il est nécessairement nul, ce qui prouve que $P_1 = cP_0$.

   (c) Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$ contenant tous les polynômes $X^k P_0$, avec $k \leqslant n - d$ (question 4). Étant stable par combinaisons linéaires, il contient donc tous les polynômes de la forme SP_0, avec $S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]$. Réciproquement, si $P \in \ker(f)$, on peut effectuer la division euclidienne de S par le polynôme P_0 : $P = SP_0 + Z$, avec bien sûr $d^\circ(Z) < d$. Comme P a un dégré inférieur ou égal à n (question 3), le quotient S apartient à $\mathbb{C}_{n-d}[X]$, et SP_0 est donc un élément du noyau (c'est la première partie de notre preuve !). Mais cela prouve que $Z = P - SP_0 \in \ker(f)$ (c'est une somme de deux polynômes du noyau), alors qu'il a un degré strictement inférieur à d. Seule possibilité : $Z = 0$ et $P = SP_0$, exactement ce qu'on voulait prouver.
6. Les questions précédentes prouvent que le noyau de f est le même que celui de sa restriction f_3 à $\mathbb{C}_3[X]$, qu'on a calculé plur haut. On conclut donc aisément : $\ker(f) = \text{Vect}(X^3 - 1)$.

V. Étude d'un produit scalaire.

1. Quand on effectue une division de polynômes à coefficients réels, quotient et reste le sont aussi, donc $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par g, qui est bien sûr linéaire puisque f l'est. Sa matrice A dans la base canonique est la même qu'en question II.3.a, les calculs restant valables tels quels !

2. A étant une matrice symétrique, $A^\top A = A^2 = I_3$ (calcul déjà effectué plus haut), la matrice est bien une matrice orthogonale.
3. Calculons donc : $g(1) = X$ donc $\langle g(1), g(1)\rangle = \langle X, X\rangle = 1 + 1 + 0$, alors que $\langle 1, 1\rangle = 1 + 0 + 0 = 1$. Comme il me semble que $2 \neq 1$, l'application g n'est donc pas une isométrie. Pour ceux qui auraient pris un peu d'avance sur le programme d'algèbre, ce n'est absolument pas contradictoire avec le fait que la matrice de l'application est orthogonale dans la base canonique, cat cette base n'est pas une base orthonormale pour le produit scalaire proposé.