Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 12

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 29 mai 2023

Ce devoir vous permettra de réviser avant le devoir bilan du 3 juin. Il est constitué d'une grosse partie d'un sujet posé en 2009 au concours des Petites Mines, qui n'existe plus aujourd'hui mais qui était à l'époque accessible aux élèves en fin de première année. L'intégralité de l'énoncé correspondait à une seule épreuve de 4 heures, et j'ai du supprimer quelques questions portant sur des notions qui ne sont plus au programme de nos jours (le problème d'analyse comportait une quatrième partie avec une étude de courbe paramétrée ; celui d'algèbre une cinquième partie sur l'étude d'un produit scalaire, ainsi qu'une question faisant intervenir des coniques dans la première partie). Comme vous pourrez le constater, c'est très long pour quatre heures ! Bien entendu, le but est de faire ce sujet par vous-même sans aller chercher des corrigés qui sont facilement trouvables en ligne.

Problème 1 : analyse.

I. Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$. On fournit les valeurs approchées suivantes : $e \simeq 2.72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.61$, $\sqrt{2} \simeq 1.41$ et $\ln(3) \simeq 1.10$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet. On précisera les éventuelles asymptotes à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.
2. Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 ?
3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente. Quel résultat retrouve-t-on ?
4. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
5. (a) Pourquoi f admet-elle des développements limités à tout ordre en 0 ?
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 5 de f au voisinage de 0.

II. Étude d'une équation différentielle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$, et (H_n) l'équation homogène associée à (E_n).

1. Résoudre (H_n) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. En déduire les solutions de (E_n) sur chacun de ces deux intervalles.
3. Donner toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

III. Étude de deux suites.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et on pose $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

1. Quel est le signe de $f_n(0)$? De $f_n(1)$?

2. Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$ et préciser $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux valeurs u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
4. (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite (u_n).
   (d) Montrer que la suite (u_n) converge. On notera l sa limite.
5. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
   (a) Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$ (on suppose ici $t > 0$).
   (b) On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclure.
   (c) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 1$. En utilisant un devéloppement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$, trouver un équivalent simple de w_n.

Problème 2 : algèbre.

I. Étude d'un polynôme.

1. Soit U le polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ suivant : $U(X) = X^2 + (1 - 2i)X - 2i$.
   (a) Donner les racines carrées de $3 - 4i$.
   (b) Trouver les racines du polynôme U.
2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
   (a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $U(z)$ en fonction de x et de y.
   (b) Donner une équation de l'ensemble $\Gamma_1 = \{M(z) \mid U(z) \in i\mathbb{R}\}$ et de l'ensemble $\Gamma_2 = \{M(z) \mid U(z) \in \mathbb{R}\}$. *Ici, l'énoncé initial demandait une étude plus détaillée et un tracé de ces ensembles, mais vous n'avez pas les outils pour le faire.*

II. Définition d'une application.

On fixe un entier naturel non nul n pour toute la suite du problème. Soit T un polynôme fixé de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui, à un polynôme $P(X)$, associe $Q(X) + XR(X)$, où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. Autrement dit, $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$. On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Dans cette question uniquement, $n = 2$ et $T(X) = X^2$.
   (a) Donner la matrice A de f_2 dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
   (b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner sa réciproque. En déduire la nature de f_2.
4. Dans cette question uniquement, $n = 2$ et $T(X) = (X - 1 - i)(X + i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2 + (1 - 2i)X - 2i$ par l'application f.

III. Étude d'un cas particulier.

Soit $a \in \mathbb{C}$ fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3 + X^2 + a$.

1. Montrer que f_3 a pour matrice dans la base canonique $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le déterminant de f_3 *(question facultative puisqu'on n'aura probablement pas vu le déterminant avant que vous n'ayez à rendre ce devoir).*
3. Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.
4. Dans cette question $a = -1$.
   (a) Donner une base de $\ker(f_3)$.
   (b) Donner une base de $\mathrm{Im}(f_3)$.
   (c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

IV. Étude du noyau.

On se replace ici dans le cas général.

1. Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$. Montrer que $f(P) \neq 0$.
2. Montrer qu'un polynôme P appartient à $\ker(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$.
3. En déduire que, si $P \in \ker(f)$, alors $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
4. Déduire de la question 2 que, si $P \in \ker(f)$ et k est un entier tel que $d^\circ(P) + k \leqslant n$, alors $X^k P(X)$ appartient aussi au noyau de f.
5. On suppose dans cette question que $\ker(f) \neq \{0\}$. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tels qu'il existe un polynôme de degré k appartenant au noyau de f.
   (a) Montrer que I possède un plus petit élément d.
   (b) Soit $P_0 \in \ker(f)$ de degré d et $P_1 \in \ker(f)$ également de degré d. Montrer qu'il existe un nombre complexe c tel que $P_1 = cP_0$.
   (c) Montrer que $P \in \ker(f)$ si et seulement si $P = SP_0$, avec $S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]$.
6. On suppose dans cette question que $T(X) = X^3 + X^2 - 1$. Donner le noyau de f.

V. Étude d'un produit scalaire.

J'ai choisi de laisser cette dernière partie en supprimant ce que vous ne pouviez pas faire pour l'instant.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considèrera la restriction g de f_2 à $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et donner sa matrice A dans la base canonique.
2. Montrer que A est une matrice orthogonale, c'est-à-dire que $A^\top A = I_3$.
3. On pose, pour deux polynômes U, V dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle U, V\rangle = U(1)V(1) + U'(1)V'(1) + U''(1)V''(1)$ (ce qui définit un **produit scalaire** sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$). Un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ est une **isométrie** si on a $\langle \varphi(U), \varphi(V)\rangle = \langle U, V\rangle$ pour tous polynômes U, V. L'application g est-elle une isométrie de $\mathbb{R}_2[X]$ (on pourra calculer $\langle 1, 1\rangle$ et $\langle g(1), g(1)\rangle$) ?