Devoir Maison n^{o} 11 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 avril 2023

Problème 1 : autour de la formule de Stirling.

Première méthode : avec des séries.

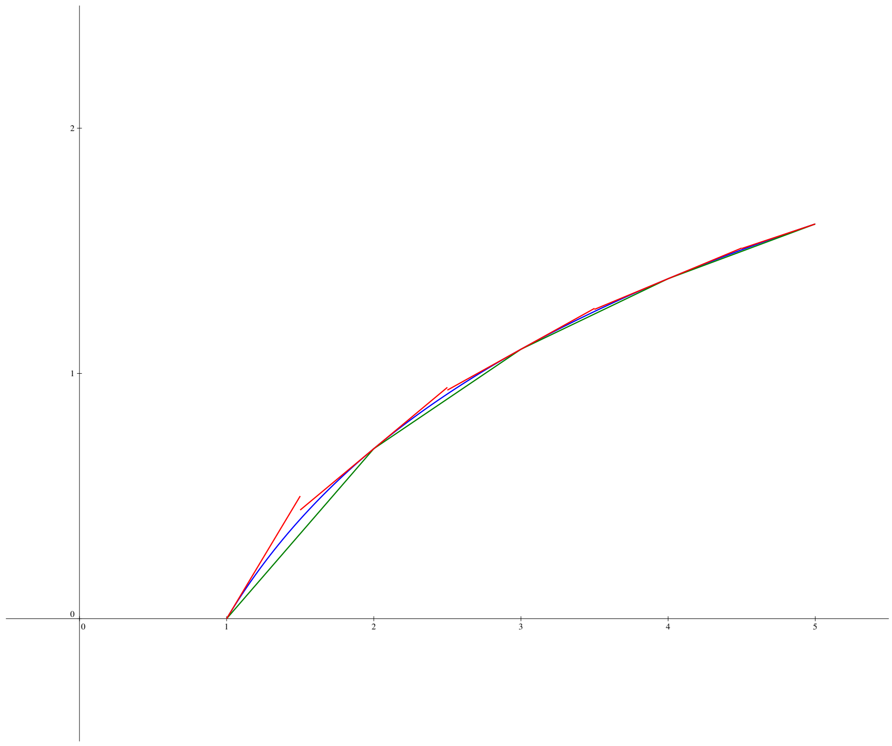
1. La suite (S_n) est croissante de façon évidente, puisque $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Pour la majoration, on va exploiter poliment les indications de l'énoncé : si $k \geqslant 2$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ permet effectivement d'écrire la majoration $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, valable sur tout l'intervalle $[k-1, k]$. On intègre alors cette majoration pour obtenir $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x^2}\, dx$. En additionnant ces inégalités pour toutes les valeurs de k comprises entre 2 et n, on peut en déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x^2}\, dx$, soit à l'aide de la relation de Chasles $S_n - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{x^2}\, dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \dfrac{1}{n}$. On a donc prouvé que $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$, ce qui montre bien que la suite (S_n) est majorée et donc convergente.
2. Commençons par simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}} \times \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}}$, puis calculons $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = -1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Pour en obtenir un équivalent on va effectuer un DL à l'ordre 3 du ln, la variable $\dfrac{1}{n}$ ayant bien sûr une limite nulle (l'ordre 3 est nécessaire à cause des termes qui vont se simplifier, même si ce n'est pas forcément clair avant de se lancer dans le calcul). On obtient $v_n = -1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = -1 + 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{12n^2}$ (on fait bien sûr attention au fait que la multiplication par n change l'ordre de grandeur dans le o). On applique ensuite le résultat donné dans l'énoncé : v_n est positif (au moins à partir d'un certain rang, vu l'équivalent obtenu) et équivalent au terme général d'une suite dont les sommes partielles convergent (à un facteur 12 près, il s'agit de la convergence de (S_n) qu'on a prouvée juste avant). La suite incorrectement notée (S_n) dans l'énoncé (il y deux fois la même notation pour des suites différentes !) converge donc elle aussi. On notera plutôt $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ dans ce corrigé pour ne pas entretenir la confusion.
3. La suite (T_n) dont on vient de prouver la convergence peut en fait être exprimée plus simplement : par télescopage, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$. En notant l la limite de la suite suite (T_n), on peut donc écrire que $\lim \ln(u_{n+1}) = l + \ln(u_1)$, ce qui prouve que la suite $\ln(u_n)$ converge, et donc que (u_n) elle-même converge, et même vers une limite

strictement positive (puisqu'il s'agit de l'exponentielle de la limite précédente). En notant $\dfrac{1}{K}$ la limite de (u_n), on a donc $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{K}$, soit $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

4. En reprenant les notations du problème sur les intégrales de Wallis, on y avait démontré que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, ce qui d'après la question précédente devrait être équivalent à $\dfrac{K\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times \dfrac{e^{2n}}{K^2n^{2n+1}} \times \dfrac{\pi}{2^{2n+1}} \sim \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$. Or, dans ce même problème, on nous affirmait (à la fin de la première partie) que $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$, donc $I_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. On en déduit que $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \times \dfrac{K\sqrt{2n}}{\pi} \sim 1$, soit $K \sim \sqrt{2\pi}$. K étant une constante, on a donc simplement $K = \sqrt{2\pi}$, et la formule de Stirling stipule donc que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Deuxième méthode : avec des encadrements moches de logarithmes.

1. La fonction g représente simplement la corde à la courbe de ln passant par ses points d'abscisse k et $k+1$, alors que h est constitué de deux morceaux de tangentes à cette même courbe. Ci-dessous, la courbe de ln est en bleu (on a uniquement représenté l'intervalle $[1,5]$), les segments verts correspondent à g et les morceaux rouges à h. On ne voit objectivement à peu près rien :



2. La fonction ln étant concave, sa courbe est toujours située au-dessus de ses cordes, et en-dessous de ses tangentes. On a donc, sur l'intervalle $[k, k+1]$, l'encadrement $g(x) \leqslant \ln(x) \leqslant h(x)$, qu'on peut bien sûr intégrer entre k et $k+1$ pour obtenir un encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\,dt$. Or, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,dt = \frac{1}{2}(\ln(k)+\ln(k+1))$ puisqu'on calcule simplement l'aire d'un trapèze rectangle sont les deux hauteurs valent respectivement $g(k) = \ln(k)$ et $g(k+1) = \ln(k+1)$. Pour l'intégrale de la fonction h, on va donner son expression explicite : sur $\left[k, k+\dfrac{1}{2}\right]$, $h(x) =$

$\frac{1}{k}(x-k)+\ln(k)$ (équation de tangente), donc $\int_k^{k+\frac{1}{2}} h(t)\ dt = \left[\frac{1}{2k}(x-k)^2 + t\ln(k)\right]_k^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8k}+\frac{1}{2}\ln(k)$. De même, $\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} h(t)\ dt = \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{1}{k+1}(t-k-1)+\ln(k+1)\ dt$
$= \left[\frac{1}{2(k+1)}(t-k-1)^2 + t\ln(k+1)\right]_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} = -\frac{1}{8(k+1)}+\frac{1}{2}\ln(k=1)$. En additionnant ces deux valeurs, on trouve bien le majorant demandé par l'énoncé.

3. (a) Commençons par le plus évident : $J_n = \int_1^n \ln(t)\ dt = [t\ln(t)-t]_1^n = n\ln(n)-n+1$. C'est pour K_n qu'on va faire apparaitre des factorielles : $K_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1) = \frac{1}{2}(\ln((n-1)!) + \frac{1}{2}\ln(n!) = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n)$. Enfin, par télescopage, $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{8}-\frac{1}{8n}$, donc $L_n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{8} - \frac{1}{8n}$.

   (b) On sait déjà que $\int_n^{n+1} \ln(t)\ dt \geqslant \frac{1}{2}(\ln(n)+\ln(n+1))$, ce qui prouve exactement que $J_{n+1}+K_{n+1}-J_n-K_n \geqslant 0$ et donc que la suite est croissante. De plus, toujours d'après les encadrements de la question précédente, $J_n - K_n \leqslant L_n - K_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8(n+1)} \leqslant \frac{1}{8}$, donc la suite est bien majorée, elle converge donc.

   (c) On a vu plus haut que $J_n - K_n = n\ln(n) - n + 1 - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}n!}\right)$, donc la convergence de la suite permet d'écrire (quitte à passer à l'exponentielle) que $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}n!} \sim e^l$, et donc que $n! \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^l e^{n-1}}$.

Troisième méthode : avec des fonctions invraisemblables.

1. Les trois fonctions sont bien définies et dérivable sur l'intervalle $[0,1[$. De plus, $f'(x) = -1+\frac{1}{2}\times\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$ (on rappelle en passant qu'on peut dériver directement $\ln(|u|)$ sans se préocupper du signe de u), soit $f'(x) = -1-\frac{1}{x^2-1} = -\frac{x^2}{x^2-1}$, dérivée manifestement positive sur $[0,1[$. La fonction f est donc croissante. De plus, $f(0)=0$, donc f est positive. Passons à la deuxième fonction : $g'(x) = \frac{9x^2(1-x^2)+x^3\times 6x}{9(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{3(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{3(1-x^2)^2}$, qui est à nouveau clairement positive sur $[0,1[$. La fonction g est donc elle aussi croissante, et $g(0)=0$ donc g est positive. Enfin, $h'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{3x^2-x^4}{3(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-3x^4-3x^2+x^4}{3(1-x^2)^2} = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2} \leqslant 0$, donc la fonction h est décroissante et négative (elle s'annule bien sûr en 0).

2. Calcudons : pour $x = \frac{1}{2n+1}$, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\frac{1}{2n+1}+1}{\frac{1}{2n+1}-1} = \frac{2n+2}{2n} = 1+\frac{1}{n}$, donc $(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (ce qui devrait vous rappeler des choses vues dans la première partie du problème). L'autre calcul est simplement bourrin : $(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1}{3}\times$

$$\frac{\frac{1}{(2n+1)^3}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} = \frac{1}{3(4n^2+4n)} = \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. Essayons donc déterminer la monotonie de la suite (u_n). Pour cela, on va plutôt calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer sa position par rapport à 1 (tous les termes de la suite étant positifs, cela suffira à connaître sa monotonie), voire même le logarithme de ce quotient : $\ln(u_n) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$, donc $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \ln((n+1)!) - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n + \ln(n!) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) = -1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Tiens, c'est exactement la première valeur calculée dans la question précédente, qui est positive puisque la fonction f ne prend que des valeurs positives sur $[0,1[$ et que $\dfrac{1}{2n+1}$ appartient certainement à cet intervalle. On en déduit que $\ln(u_{n+1}) \geqslant \ln(u_n)$, donc la suite (u_n) est croissante.
   Calculons de même $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln(u_{n+1}) + \dfrac{1}{12(n+1)} - \ln(u_n) - \dfrac{1}{12n} = (2n+1)f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) - \dfrac{1}{12n(n+1)} = (2n+1)h\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ en exploitant à nouveau les résultats obtenus à la question précédente. La fonction h étant négative sur $[0,1[$, on en déduit cette fois-ci que la suite (v_n) est décroissante.
   Comme $e^{\frac{1}{12n}}$ est un nombre toujours plus grand que 1, on a $u_n < v_n \leqslant v_0$ donc la suite (u_n) est croissante majorée et converge, et de même pour (v_n) qui est décroissante et minorée (par exemple par 0). En notant l et l' les limites respectives des deux suites, on aura donc $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{l'}{l}$. Or, $\dfrac{v_n}{u_n} = e^{\frac{1}{12n}}$ tend clairement vers 1, donc $l = l'$ et les suites sont bien adjacentes.
4. On note $\dfrac{1}{K}$ la limite commune des deux suites, comme d'habitude on peut écrire $u_n \sim \dfrac{1}{K}$, soit $n! \sim Kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, exactement ce qu'on voulait.
5. On sait que $\lim \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ existe et est finie, donc $\lim \left(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. Autrement dit, $(n!)^{\frac{1}{n}} \sim \dfrac{n^{1+\frac{1}{2n}}}{e} \sim \dfrac{n}{e}$, et $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

Problème 2 : nombres de Bernoulli et formule d'Euler-MacLaurin.

Première partie : Une famille de polynômes.

1. Un polynôme P appartenant au noyau de Δ_n (ou de Δ) est 1-périodique. Or, seuls les polynômes constants sont périodiques (une façon simplement de le prouver : si P est 1-périodique, alors le polynôme défini par $Q(X) = P(X) - P(0)$ admet tous les entiers pour racines puisqu'il s'annule en 0 et qu'il est lui-même 1-périodique, donc il est nul, ce qui prouve que P est constant égal à $P(0)$). Réciproquement, tout polynôme constant vérifie bien entendu $\Delta(P) = 0$, donc $\ker(\Delta_n) = \ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$. Le théorème du rang assure alors que $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_n)) = \dim(E_n) - 1 = n$. Or, l'image d'un polynôme de E_n par Δ_n est toujours un polynôme de degré $n-1$ au maximum puisque les coefficients de degré n dans $P(X)$ et $P(X-1)$ sont identiques. On a donc $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset E_{n-1}$ et l'égalité des dimensions prouve que $\mathrm{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}$. Pour pinailler, on peut signaler que, dans le cas très particulier où $n = 0$, $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \{0\}$ (le noyau reste par contre le même, Δ_0 est simplement l'application nulle). Reste à déterminer l'image de Δ. Soit P un polynôme de degré n, alors P est l'image par Δ_{n+1} d'un polynôme Q de degré $n+1$ d'après le calcul précédent, et donc appartient également à

l'image de Δ. Comme ceci est vrai quel que soit le degré de P, l'application Δ est surjective : $\mathrm{Im}(\Delta) = E$.

2. Si $\Delta(P_1) = \Delta(P_2)$, alors $P_1 - P_2 \in \ker(\Delta)$, donc P_1 et P_2 diffèrent d'une constante (la réciproque est immédiate).

3. (a) Pour l'existence, commençons par constater que $(X-1)^n$ admet un antécédent par Δ qui est surjective. En notant $\tilde{Q_n}$ cet antécédent, il suffit de poser $Q_n(X) = \tilde{Q_n}(X) - \tilde{Q_n}(0)$ pour obtenir un antécédent vérifiant $Q_n(0) = 0$. Par ailleurs, deux polynômes vérifiant les conditions de l'énoncé différeraient d'une constante tout en s'annulant tous les deux en 0, c'est impossible. L'unique polynôme Q_n est de degré $n+1$ d'après les calculs de la première question.

   (b) On sait que $Q_n(0) = 0$ et $Q_n(1) - Q_n(0) = 0^n$, donc $Q_n(1) = 0$. De même, $Q_n(2) - Q_n(1) = 1^n$, donc $Q_n(2) = 1$. On aurait de même $Q_n(3) = 1 + 2^n$, puis $Q_n(4) = 1 + 2^n + 3^n$ et ainsi de suite. Une récurrence triviale prouve que $Q_n(p) = \sum_{k=1}^{p-1} k^n$.

   (c) Le polynôme Q_0 est de degré 1 et s'annule en 0 donc $Q_0 = aX$. Comme on souhaite de plus que $Q_0(X) - Q_0(X-1)$ soit égal à $(X-1)^0 = 1$, on doit donc imposer $aX - a(X-1) = 1$, donc $a = 1$ et $Q_0 = X$. De même, Q_1 est de degré 2 et s'annule en 0 et en 1 (cf question 3.*b*) donc $Q_1(X) = aX(X-1)$. La condition $Q_1(X) - Q_1(X-1) = X - 1$ impose $aX(X-1) - a(X-1)(X-2) = X - 1$, soit $(X-1)(aX - aX + 2a) = X - 1$ et donc $a = \frac{1}{2}$ puis $Q_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.

4. Puisque $Q_n(X) - Q_n(X-1) = (X-1)^n$, on peut dériver cette égalité pour obtenir $Q_n'(X) - Q_n'(X-1) = n(X-1)^{n-1}$. Le polynôme Q_n' est donc un antécédent par Δ de $n(X-1)^{n-1}$, ce qui est aussi le cas de nQ_{n-1} par définition. Ces deux polynômes diffèrent donc d'une constante : $nQ_{n-1} = Q'n + a_n$, et il suffit d'évaluer l'égalité pour $X = 0$ pour obtenir $a_n \in \mathbb{Q}$ (un polynôme à coefficients rationnels prend toujours une valeur rationnelle en 0 puisque cette valeur est égale à son coefficient constant).

5. En remplaçant X par $1 - X$ dans sa définition, le polynôme Q_n vérifie $Q_n(1-X) - Q_n(-X) = (-X)^n = (-1)^n X^n$, ce qu'on peut écrire sous la forme $(-1)^{n+1}S_n(X) - (-1)^{n+1}S_n(X+1) = (-1^n)X^n$, ou encore en simplifiant $-S_n(X) + S_n(X+1) = X^n$. Effectuons un nouveau changement de variable en remplaçant X par $X - 1$: $-S_n(X-1) + S_n(X) = (X-1)^n$, ce qui est l'équation vérifiée par Q_n. Comme de plus $S_n(0) = Q_n(1) = 0$, on a tout bêtement $S_n = Q_n$, dont découle directement l'égalité demandée.

6. On applique l'égalité précédente : $Q_{2p}(X) + Q_{2p}(1-X) = 0$, donc $2Q_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, ce qui prouve évidemment que Q_{2p} s'annule en $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, en partant de $Q_{2p+1}(X) - Q_{2p+1}(1-X) = 0$ et en dérivant, on obtient $(2p+1)(Q_{2p+1}'(X) + Q_{2p+1}'(1-X)) = 0$, et on conclut de même que ci-dessus que $Q_{2p+1}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. L'égalité de la question 4 appliquée pour $n = 2p+1$ donne alors immédiatement $a_{2p+1} = 0$.

7. (a) On a calculé explicitement Q_1 plus haut, et il est toujours négatif sur $]0,1[$. On n'a par contre pas calculé Q_2 mais on sait déjà qu'il admet 0 et 1 pour racines, mais aussi $\frac{1}{2}$ d'après la question précédente. Comme il s'agit d'un polynôme de degré 3, il ne peut pas avoir d'autres racines que ces trois-là, et ne s'annule donc qu'en $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $]0,1[$. Voilà qui initialise une récurrence où va prouver simultanément les deux propriétés demandées. Supposons donc que Q_{2p-1} soit de signe constant sur $]0,1[$ et que Q_{2p} ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$ sur ce même intervalle. Supposons alors par l'absurde que Q_{2p+1} ne soit pas de signe constant sur $]0,1[$, cela signifie donc que $Q_{2p+1}(a) = 0$ pour un certain $a \in]0,1[$. Mais

comme par ailleurs $Q_{2p+1}(0) = Q_{2p+1}(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur les deux intervalles $]0, a[$ et $]a, 1[$ pour obtenir deux valeurs d'annulation distinctes de Q'_{2p+1}, ce qui contredit nos hypothèses dans la mesure où $Q'_{2p+1} = (2p+1)Q_{2p}$ (question 4 en tenant compte du fait que $a_{2p+1} = 0$). Le polynôme Q_{2p+1} est donc bien de signe constant. Passons maintenant au cas de Q_{2p+2} et supposons qu'il s'annule ailleurs qu'en $\frac{1}{2}$. En appliquant à nouveau le théorème de Rolle sur trois intervalles (puisqu'avec 0 et 1 on a quatre valeurs d'annulation distinctes pour Q_{2p+2}), on en déduit que Q'_{2p+2} s'annule trois fois sur $]0, 1[$, puis (toujours grâce à Rolle) que Q''_{2p+2} s'annule lui-même deux fois sur $]0, 1[$. Or, $Q''_{2p+2} = (2p+2)Q'_{2p+1}$ et $Q'_{2p+1} = (2p+1)Q_{2p}$, donc le polynôme Q_{2p} aurait lui aussi deux valeur d'annulation dans $]0, 1[$, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses. On a bien prouvé l'hérédité de notre récurrence.

(b) On sait déjà que Q_2 s'annule en 0, en 1 et en $\frac{1}{2}$, donc $Q_n = aX(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. En revenant une fois de plus à la relation définissant nos polynômes, $aX(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right) - a(X-1)(X-2)\left(X - \frac{3}{2}\right) = (X-1)^2$, donc $aX\left(X - \frac{1}{2}\right) - a(X-2)\left(X - \frac{3}{2}\right) = X - 1$, soit en développant tout $aX^2 - \frac{a}{2}X - aX^2 + \frac{7a}{2}X - 3a = X - 1$, donc $3aX - 3a = X - 1$, ce qui donne $a = \frac{1}{3}$ et $Q_2 = \frac{1}{3}X(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Le polynôme Q_2 est donc positif sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et négatif sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme $Q'_3 = 3Q_2$, Q_3 est donc croissant puis décroissant et, s'annulant en 0 et en 1, est nécessairement positif sur $]0, 1[$. On sait par ailleurs déjà que Q_1 est au contraire strictement négatif sur $]0, 1[$. Prouvons alors par récurrence que Q_{2p+1} est toujours du signe de $(-1)^{p+1}$ sur $]0, 1[$ et que Q_{2p} est du signe de $(-1)^p$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et du signe de $(-1)^{p+1}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On vient de le vérifier pour $p = 0$ et $p = 1$. Supposons les signes et variations corrects au rang p, donc pour Q_{2p} et Q_{2p+1}, alors la relation $Q''2p + 2 = (2p+2)(2p+1)Q_{2p}$ (cf question précédente) prouve que Q_{2p+2} est convexe ou concave sur chacun des intervalles $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme le polynôme s'annule aux bornes de chacun de ces deux intervalles, son signe en découle : par exemple si Q_{2p} est positif sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, Q_{2p+2} y sera convexe et donc négatif, et inversement. Le signe du polynôme Q_{2p+3} en découle immédiatement : si Q_{2p+2} est négatif puis positif, Q'_{2p+3} l'est aussi donc Q_{2p+3} est décroissant puis croissant et donc négatif sur $]0, 1[$. De même pour l'autre signe.

Déterminons enfin le signe de a_{2p} : on sait que $Q'_{2p} + a_{2p} = 2pQ_{2p-1}(X)$. Le membre de droite de cette égalité est de signe constant, ce qui empêche la nullité de a_{2p} puisque Q'_{2p}, lui, ne peut pas être de signe constant (sinon, Q_{2p} serait monotone sur tout l'intervalle, ce qui n'est pas le cas). Dans le cas où p est pair, Q_{2p-1} est positif et Q'_{2p} prend des valeurs négatives, donc a_{2p} doit être positif. C'est le contraire si p est impair. Le nombre a_{2p} est donc du signe de $(-1)^p$.

8. Les polynômes Q_n vérifient bien les relations données dans cette question (en décalant la relation de la question 4 puis en dérivant pour obtenir $Q''_{n+1} = (n+1)Q'_n$). Supposons réciproquement qu'une suite de polynômes (T_n) vérifie ces mêmes relations, alors par hypothèse T_0 et T_1 coïncident avec Q_0 et Q_1. Prouvons par récurrence que c'est le cas pour tous les polynômes de la suite : si $T_n = Q_n$, alors $T''_{n+1} = Q''_{n+1}$, donc $T_{n+1} - Q_{n+1}$ est un polynôme de degré au maximum 1 (il a une dérivée seconde nulle) qui s'annule par hypothèse en 0 et en 1. C'est donc le polynôme nul, ce qui prouve que $T_{n+1} = Q_{n+1}$ et achève donc la récurrence.

Deuxième partie : Formule d'Euler-Maclaurin.

1. On va bien sûr procéder par récurrence. Essayons déjà de prouver la formule pour $n = 0$, qui affirme donc que $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(1) + f'(0)}{2} + \displaystyle\int_0^1 Q_1(t) f'''(t)\ dt$. Or, on sait que $Q_1(t) = \dfrac{1}{2}t(t-1)$, calculons donc l'intégrale de droite via une IPP, en posant $u(t) = \dfrac{1}{2}t(t-1)$, donc $u'(t) = t - \dfrac{1}{2}$, et $v'(t) = f'''(t)$ qu'on intègre simplement en $v(t) = f''(t)$. On en déduit que $R_0 = \left[\dfrac{1}{2}t(t-1)f''(t)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \left(t - \dfrac{1}{2}\right) f''(t)\ dt$. Le crochet est nul, on calcule l'intégrale restante via une deuxième IPP, en posant $u(t) = t - \dfrac{1}{2}$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = f''(t)$ qu'on intègre en $v(t) = f'(t)$. On obtient cette fois-ci $R_0 = -\left[\left(t - \dfrac{1}{2}\right) f'(t)\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\ dt = -\dfrac{1}{2}f'(1) - \dfrac{1}{2}f'(0) + f(1) - f(0)$, ce qui correspond exactement à la formule souhaitée.

   Passons maintenant à l'hérédité, si on suppose la formule vérifiée au rang n, on calcule alors R_n en utilisant le fait que $Q_{2n+1}(t) = \dfrac{1}{2n+2}(Q'_{2n+2}(t) + a_{2n+2})$ (cf première partie du problème), donc $R_n = \dfrac{1}{(2n+2)!}[a_{2n+2}f^{(2n+2)}(t)]_0^1 + \dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^1 Q'_{2n+2}(t)f^{(2n+3)}(t)\ dt$. On intègre par parties le morceau de droite en dérivant $f^{(2n+3)}$ et en primitivant Q'_{2n+2} (de façon évidente) pour obtenir $R_n = \dfrac{1}{(2n+2)!}[a_{2n+2}] + \dfrac{1}{(2n+2)!}[Q_{2n+2}(t)f^{(2n+3)}(t)]_0^1 - \dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+2}(t)f^{(2n+4)}(t)\ dt$. Le premier crochet vaut, par définition des nombres de Bernoulli, $\dfrac{(-1)^{n+1}B_{n+1}}{(2n+2)!}(f^{(2n+2)}(1) - f^{(2n+2)}(0))$, c'est-à-dire exactement la valeur à ajouter à la somme de la formule au rang n pour obtenir la somme de la formule au rang $n+1$. Le deuxième crochet est nul puisque Q_{2n+2} s'annule en 0 et en 1, il ne reste donc plus pour achever la récurrence qu'à démontrer que $R_{n+1} = -\dfrac{1}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+2}f^{(2n+4)}(t)\ dt$. Or, $Q_{2n+2} = \dfrac{1}{2n+3}Q'_{2n+3}$ (puisque $a_{2n+3} = 0$), on peut donc effectuer une nouvelle IPP en dérivant $f^{(2n+4)}$ et en primitivant Q'_{2n+3}, ce qui donne $-\dfrac{1}{(2n+3)!}[Q_{2n+3}(t)f^{(2n+4)}(t)]_0^1 + \dfrac{1}{(2n+3)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+3}(t)f^{(2n+5)}(t)\ dt$. Comme le crochet est une nouvelle fois nul, on trouve bien la formule de R_{n+1}, ce qui achève notre récurrence.

2. En majorant brutalement $f^{(2n+3)}(t)$ par $\|f^{(2n+4)}\|$, on a directement $|R_n| \leqslant \dfrac{\|f^{(2n+3)}}{(2n+1)!}\left|\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(t)\ dt\right|$. Or, en appliquant les mêmes méthodes que dans la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(t)\ dt = \int_0^1 \dfrac{Q'_{2n+2}(t) + a_{2n+2}}{2n+2}\ dt = \dfrac{1}{2n+2}[Q_{2n+2}(t) + a_{2n+2}t]_0^1 = \dfrac{a_{2n+2}}{2n+2}$. Comme $|a_{2n+2}| = B_{n+1}$, on obtient bien $|R_n| \leqslant \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\|f^{(2n+3)}\|$ (il y avait une erreur d'énoncé sur l'indice du nombre de Bernoulli).

3. Il faut être un peu courageux pour cette question, commençons déjà par découper l'intégrale en $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\ dx$ (on a simplement découpé l'intervalle d'intégration en p morceaux de largeur h et appliqué la relation de Chasles). Définissons alors une fonction

g_i sur $[0,1]$ par $g_i(t) = \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+t)h} f(x)\ dx$. La fonction f étant supposée de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$, les fonctions g_i sont de classe $\mathcal{C}^{2n+3}$ et on peut leur appliquer la formule de la première question : $\displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\ dx = g_i(1) - g_i(0) = \frac{g_i'(0)+g_i'(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{B_k}{(2k)!}(g_i^{(2k)}(1) - g_i^{(2k)}(0)) + R_n(i)$, avec $|R_n(i)| \leqslant \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\|g_i^{(2n+3)}\|$. Calculons maintenant les dérivées des fonctions g_i : $g_i'(t) = hf(a+(i+t)h)$, puis $g_i^{(k)}(t) = h^k f^{(k-1)}(a+(i+t)h)$. On peut donc écrire (désolé, c'est tellement moche que ça ne tient pas sur une seule ligne) :

$$\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\ dx = h\frac{f(a+ih)+f(a+(i+1)h)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}h^{2k}(f^{(2k-1)}(a+(i+1)h) - f^{(2k-1)}(a+ih)) + R_n(i)$$

On additionne ces formules pour i variant de 0 à $p-1$ et on trouve alors la sublime formule souhaitée :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{p-1} h\frac{f(a+ih)+f(a+(i+1)h)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}h^{2k}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + \sum_{i=0}^{p-1} R_n(i)$$

La somme à gauche correspond bien à la définition donnée dans l'énoncé de u_p (il suffit de décaler un peu, c'est exactement ce qu'on fait pour obtenir la formule simplifiée dans la méthode des trapèzes). Il ne reste qu'à majorer le reste $|T_n| = \left|\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} R_n(i)\right| \leqslant \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\|g_i^{(2n+3)}\|$. Or, $\|g_i^{(2n+3)}\| \leqslant h^{2n+3}\|f^{(2n+2)}\|$, ce qui donne bien, puisqu'il y a p termes dans la somme, $|T_n| \leqslant \dfrac{pB_{n+1}}{(2n+2)!}h^{2n+3}\|f^{(2n+2)}\|$.

4. En effet, puisque $p = \dfrac{b-a}{h}$, le reste T_n est en $O(h^{2n+2})$ (oui c'est bien un **grand** O que j'ai écrit ici), donc négligeable par rapport à h^{2n}, et la formule de la question précédente est donc (quitte à faire passer la somme de droite à gauche) un DL à l'ordre $2n$ suivant les puissances de h (dont les coefficients sont ignobles, on est bien d'accord). Son terme constant étant égal à $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, la convergence en découle.

5. (a) La formule précédente permet d'écrire $u_p = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \alpha h^2 + o(h^2)$, en notant α le coefficient dégueulasse situé devant h^2. On en déduit facilement que $p^2\left(u_p - \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\right) = (b-a)^2 + o(1)$, qui est bornée. On rappelle aux plus étourdis que, par définition, $p = \dfrac{b-a}{h}$. La convergence est donc d'ordre 2 au moins. Si $f'(a) = f'(b)$, on a $\alpha = 0$ et donc $u_p = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \beta h^4 + o(h^4)$ et un calcul quasi-identique au précédent montre que la convergence est d'ordre au moins 4.

   (b) On a $u_p = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \alpha h^2 + \beta h^4 + o(h^4)$. On peut en déduire que $h_{2p} = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \frac{\alpha}{4}h^2 + \frac{\beta}{16}h^4 + o(h^4)$, toujours en exploitant le fait que p est inversement proportionnel à h.

On a donc $v_p = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\beta}{4}h^4 + o(h^4)$, ce qui donne une convergence vers $\int_a^b f(x)\,dx$ avec un ordre de convergence au moins égal à 4.

De même, on peut écrire, en continuant le DL, $v_p = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\beta}{4}h^4 + \xi h^6 + o(h^6)$, donc $v_{2p} = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\beta}{64}h^4 + \frac{\xi}{64}h^6 + o(h^6)$, dont on déduit que $w_p = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\xi}{20}h^6 + o(h^6)$. On a une fois de plus convergence vers $\int_a^b f(x)\,dx$, mais cette fois-ci avec un ordre de convergence au moins égal à 6.