# Devoir Maison n$^o$ 11

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 28 avril

Ce devoir à la maison va vous permettre de passer vos vacances en compagnie de grands mathématiciens (quelle chance !). Il est constitué de deux problèmes indépendants qui sont tous les deux basés sur des thèmes classiques que le taupin qui se respecte se doit d'avoir étudié au moins une fois dans sa vie. Attention, l'ensemble est très long, si vous voulez avoir le temps d'explorer sérieusement ces problèmes, ne vous y plongez pas la veille de la rentrée (et encore moins le lendemain de la rentrée...) ! Si vous souhaitez rendre ce DM, rédiger un seul problème sera déjà très bien.

## Problème 1 : autour de la formule de Stirling.

Prérequis pour ce problème : les intégrales de Wallis (**John Wallis**, mathématicien anglais du 17ème siècle, qui a popularisé le symbole $\infty$ et fût également précurseur de la phonétique et de l'orthophonie) étudiées dans le problème 2 de la feuille d'exercices n$^o$ 6, et notamment le résultat admis à la fin de la première partie de ce problème, interviendront en cours de problème.

### Première méthode : avec des séries.

Comme on n'a pas encore fait le chapitre sur les séries, on admettra le résultat suivant : si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites de réels positifs telles que $u_n \sim v_n$, et si la suite $(S_n)$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers une limite finie, alors la suite $(T_n)$ définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ converge également (mais pas forcément vers la même limite que $(S_n)$, bien entendu). Les plus courageux pourront même démontrer ce résultat classique.

1. On pose dans cette première question $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(S_n)$ converge (exemple déjà vu plusieurs fois en cours, on pourra par exemple montrer que $(S_n)$ est croissante et majorée, la majoration pouvant être obtenue en constatant que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx$).
2. On pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Déterminer un équivalent simple de $v_n$ (un peu de calculs de DL ne peut pas vous faire de mal), en déduire la convergence de $(T_n)$.
3. En déduire l'existence d'un réel $K > 0$ tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
4. En exploitant les intégrales de Wallis, déterminer la valeur de $K$ pour obtenir la formule de Stirling (**James Stirling**, mathématicien écossais du 18ème siècle ayant notamment travaillé sur les séries).

### Deuxième méthode : avec des encadrements moches de logarithmes.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note $g$ la fonction affine définie sur $[k, k+1]$ par $g(k) = \ln(k)$ et $g(k+1) = \ln(k+1)$, et $h$ la fonction affine par morceaux sur les intervalles $\left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $\left[k+\frac{1}{2}, k+1\right]$ vérifiant $h(k) = \ln(k)$, $h(k+1) = \ln(k+1)$, $h'(k) = \frac{1}{k}$ et $h'(k+1) = \frac{1}{k+1}$. La fonction $h$ n'est pas continue en $k + \frac{1}{2}$.

1. Représenter les courbes de ln, $g$ et $h$ sur un dessin, en précisant leurs positions relatives.
2. Montrer en exploitant ce qui précède l'encadrement suivant :
   $\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\, dt \leqslant \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}$.
3. On pose $J_n = \int_1^n \ln(t)\, dt$, $K_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1))$ et
   $L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$.
   (a) Exprimer $J_n$, $K_n$ et $L_n$ en fonction de $n$ (en essayant de faire apparaitre du $\ln(n!)$).
   (b) Démontrer que $(J_n - K_n)$ est une suite croissante et majorée, et qu'elle converge donc vers un réel $l$.
   (c) Donner un équivalent simple de $n!$ faisant intervenir cette limite $l$.

### Troisième méthode : avec des fonctions invraisemblables.

On pose dans cette partie $f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, $g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Déterminer la monotonie et le signe sur $[0, 1[$ des fonctions $f$, $g$ et $h$.
2. Calculer $(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ et $(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.
3. On pose $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
4. En déduire que $n! \sim K e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$ pour un certain réel $K > 0$. On reprendra la valeur de $K$ obtenue à la dernière question de la première partie.
5. Quelle est la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ?

## Problème 2 : nombres de Bernoulli et formule d'Euler-MacLaurin.

Ce sujet est un extrait (quasiment tout en fait) du premier DS de mathématiques posé dans la classe de MP* du lycée Charlemagne le 15 septembre 1999. Devoir auquel votre professeur de maths préféré avait eu la note misérable de 13/20. Vous n'aurez aucun mal à faire mieux.

### Première partie : Une famille de polynômes.

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{Q}[X]$ et $E_n = \mathbb{Q}_n[X]$ (le fait qu'on prenne $\mathbb{Q}$ comme corps de base ne change absolument rien aux calculs effectués). On défininit l'application linéaire $\Delta : E \to E$ par $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$, et on notera $\Delta_n$ la restriction de $\Delta$ au sous-espace vectoriel $E_n$.

1. Déterminer le noyau et l'image des applications $\Delta_n$ et $\Delta$.
2. Que dire de deux polynômes ayant la même image par $\Delta$ ?
3. (a) Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $Q_n$ vérifiant $Q_n(X)-Q_n(X-1) = (X-1)^n$ et $Q_n(0) = 0$. Quel est le degré de $Q_n$ ?
   (b) Calculer $Q_n(1)$ et $Q_n(2)$. Que représente $Q_n(p)$ pour $p \geqslant 1$ ?
   (c) Déterminer les polynômes $Q_0$ et $Q_1$.
4. Démontrer l'existence d'une suite de nombres rationnels $(a_n)$ telle que, $\forall n \geqslant 1$, $Q'n(X)+a_n = nQ_{n-1}(X)$.
5. En s'intéressant au polynôme $S_n(X) = (-1)^{n+1}Q_n(1-X)$, montrer que $Q_n(X)+(-1)^nQ_n(1-X) = 0$ pour $n \geqslant 1$.
6. Calculer $Q_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)$ ainsi que $Q'_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $a_{2p+1}$.
7. (a) Démontrer que $Q_{2p+1}$ est de signe constant sur $]0,1[$ et que $Q_{2p}$ ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle si $p \geqslant 1$ (on pourra procéder par récurrence).
   (b) Calculer $Q_2$ et étudier les variations sur $[0,1]$ de $Q_{2p}$, puis le signe de $Q_{2p+1}$ sur ce même intervalle. En déduire que $a_{2p}$ n'est pas nul, et déterminer son signe.
8. Montrer que les polynômes $Q_n$ sont entièrement définis par la donnée de $Q_0$, de $Q_1$ et de la relation de récurrence $Q''_{n+1} = (n+1)Q'_n$, ainsi que des conditions $Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0$.

Le nombre $B_p = (-1)^p a_{2p}$ est appelé $p$-ème nombre de Bernoulli (**Jacques Bernoulli** fût un grand mathématicien suisse, pote d'Euler, frère de Jean Bernoulli, oncle de Daniel et Nicolas Bernoulli, eux-mêmes mathématiciens).

### Deuxième partie : Formule d'Euler-Maclaurin.

Comme vous ne vous en seriez sûrement pas doutés, on va démontrer dans la première question de cette partie une belle formule due à **Colin Maclaurin**, éminent mathématicien écossais qu'il est inutile de présenter tant sa célébrité est universelle, et **Leonhard Euler**, obscur mathématicien suisse dont le nom a été complètement oublié.

Dans cette partie, on notera $\|f\|$ le maximum atteint par $|f|$ quand $f$ est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (ce maximum existe bien entendu d'après le théorème du maximum). Les polynômes $Q_n$ et les nombres $B_p$ sont ceux définis dans la première partie.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f$ de classe $\mathcal{C}^{2n+3}$ sur $[0,1]$, montrer que

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}(f^{(2k)}(1) - f^{(2k)}(0)) + R_n$$

,

où $R_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(t) f^{(2n+3)}(t)\ dt$.

2. Démontrer que $|R_n| \leqslant \dfrac{B_{2n+1}}{(2n+2)!}\|f^{(2n+3)}\|$.

3. Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $[a,b]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \dfrac{b-a}{p}$ et $u_p = \dfrac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} f(a+ih)\right)$.

   Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\ dx = u_p + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k}{(2k)!} h^{2k}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + T_n$$

   ,

   avec $|T_n| \leqslant \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!} p h^{2n+3}\|f^{(2n+2)}\|$.

4. En déduire que la suite $(u_p)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, et qu'elle admet un DL à l'ordre $2n$ suivant les puissances de $h$ (ce qui prouve accessoirement les résultats sur la méthode des trapèzes énoncés en cours).

5. On dit que la convergence d'une suite $(z_n)$ vers sa limite $l$ est d'ordre $k$ lorsque $n^k(z_n - l)$ est bornée.

   (a) Que dire de l'ordre de convergence de $(u_p)$ vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ lorsque $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ ? Que se passe-t-il si $f$ est $\mathcal{C}^4$ et que $f'(a) = f'(b)$ ?

   (b) En posant $v_p = \dfrac{1}{3}(4u_{2p} - u_p)$ et $w_p = \dfrac{1}{15}(16v_{2p} - v_p)$, que peut-on dire des limites et des ordres de convergence des suites $(v_p)$ et $(w_p)$ ?

Bon, ben voila, maintenant je n'ai plus qu'à aller taper les 42 pages de corrigé...