

# Homework n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 avril 2023

## Question 1.

Il s'agit donc de trouver le coefficient de  $x^2$  dans le développement de  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$ . Via le binôme de Newton, on calcule  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2x)^k \times \frac{1}{x^{6-k}} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k x^{2k-6}$ . La seule valeur de  $k$  pour laquelle  $2k - 6 = 2$  est bien sûr  $k = 4$ , le coefficient correspondant est donc égal à  $\binom{6}{4} \times 2^4 = \binom{6}{2} \times 16 = 15 \times 16 = 240$ .

## Question 2.

Autrement dit, le polynôme  $2x^3 + px^2 + q$  admet pour racines  $-\frac{1}{2}$  et 2. En notant  $a$  la troisième racine du polynôme, les relations coefficients racines donnent les trois équations suivantes :  $\frac{3}{2} + a = -\frac{p}{2}$ ,  $-1 - \frac{a}{2} + 2a = 0$  et  $-a = -\frac{q}{2}$ . La deuxième équation donne directement  $a = \frac{2}{3}$ , on en déduit  $q = 2a = \frac{4}{3}$  et  $q = -3 - 2a = -\frac{13}{3}$ , puis enfin  $2p + q = -\frac{22}{3}$ . Passionnant.

## Question 3.

Si on numérote les places de 1 à 40 (avec donc la place 40 à côté de la place 1), il faut trouver le sous-ensemble de taille minimale de  $\{1, \dots, 40\}$  pour lequel deux éléments modulo 40 soient toujours à distance au maximum égale à 3. En effet, si on laisse une distance 4, on pourra placer un nouvel élément « au milieu » des deux éléments en question. Pour optimiser, on a clairement intérêt à laisser le plus souvent possible une distance 3, en plaçant par exemple les personnes aux places 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37 et 39. Au moins 14 personnes sont nécessaires.

## Question 4.

Une façon de ne pas trop se fatiguer : on élève au carré la quantité dans le premier logarithme pour obtenir  $\log(a^2b^4c^2) = 14$ , puis on soustrait le deuxième, ce qui donne  $\log(a^2b^4c^2) - \log(a^2bc^2) = 3$ , donc  $\log(b^3) = 3$ , dont on déduit  $\log(b) = 1$ . Il s'agit donc nécessairement de logarithmes de base  $b$  (une fois cette hypothèse faite, les trois conditions se ramènent à  $\log(ac) = 5$ , donc  $ac = b^5$ ,  $\log(a^2c^2) = 10$  qui est équivalente à la précédente, et  $\log(a^2c^3) = 13$ , donc  $a^2c^3 = b^{13}$ . On peut alors obtenir  $c = b^3$  et  $a = b^2$ ).

## Question 5.

Posons  $S = |x - 2| - a|x| - 1$ , on peut effectuer un « tableau » de signe de l'expression  $S$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$a x $	$-ax$	$0$	$ax$	$ax$
$ x-2 $	$2-x$	$2-x$	$0$	$x-2$
$S$	$1+(a-1)x$	$1-(a+1)x$	$(1-a)x-3$	

On veut que  $S$  soit tout le temps positif. Or, sur  $] -\infty, 0]$ ,  $S$  va devenir négative si  $a > 1$  (l'expression  $S$  tend alors vers  $-\infty$  en  $-\infty$ ), et elle est trivialement positive si  $a \leq 1$  (puisque  $(a-1)x$  est alors positif sur l'intervalle). Conservons alors les cas où  $a \in ] -\infty, 1]$ . Sur le dernier intervalle,  $S$  est alors croissante et restera positive si sa valeur est déjà positive pour  $x = 2$ , donc si  $2 - 2a - 3 \geq 0$ , soit  $a \leq -\frac{1}{2}$ , on peut alors se restreindre à l'intervalle  $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ . Reste à gérer le dernier intervalle  $[0, 2]$ . Si  $a \in [-1, -\frac{1}{2}]$ ,  $a + 1 \geq 0$  donc  $S$  est décroissant sur l'intervalle, et vaut  $1 - 2(a+1) = -2a - 1$  pour  $x = 2$ , donc restera positive si  $2a \leq -1$ , ce qui forcément le cas. Si par contre  $a \in ] -\infty, -1]$ ,  $S$  croît sur l'intervalle  $[0, 2]$ , et vaut  $1$  en  $0$  donc restera positive. Conclusion : toutes les valeurs de  $a$  inférieures ou égales à  $-\frac{1}{2}$  conviennent.

### Question 6.

Les identités remarquables étant bien mises en évidence, ça ne devrait pas être trop dur, le calcul donne  $\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}-1 + 3-2\sqrt{2} = 2$  (on fait quand même attention aux signes avant de simplifier). Mention spéciale à ceux qui réussissent à répondre  $-2$  à cette question.

### Question 7.

On cherche donc à calculer l'aire comprise entre les courbes d'équations  $y = p\sqrt{x}$  et  $y = \frac{x^2}{p^2}$  (tout étant positif, pas de problème pour élever au carré). Pour calculer cela, il faut déjà connaître la position relative des deux courbes. Posons  $f(x) = \frac{x^2}{p^2} - p\sqrt{x}$ . La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ , de dérivée  $f'(x) = \frac{2x}{p^2} - \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} - p^3}{2p^2\sqrt{x}}$ . Cette dérivée s'annule pour  $x^{\frac{3}{2}} = \frac{p^3}{4}$ , donc quand  $x = \frac{p^2}{\sqrt[3]{16}}$ . Passionnant, en tout cas la fonction sera décroissante puis croissante et vérifie évidemment  $f(0) = 0$ . Reste à voir si elle quand elle va s'annuler une deuxième fois (c'est nécessairement le cas, elle a une limite égale à  $+\infty$  en  $+\infty$ ). Pour cela, on résout l'équation  $x^2 = p^3\sqrt{x}$ , soit  $x^{\frac{3}{2}} = p^3$ , et donc  $x = p^2$ . L'aire recherchée correspond donc à l'intégrale de la fonction  $-f$  (qui est positive sur l'intervalle) entre les bornes  $0$  et  $p^2$  soit  $A = \int_0^{p^2} p\sqrt{x} - \frac{x^2}{p^2} dx = \left[ \frac{2px\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3p^2} \right]_0^{p^2} = \frac{2}{3}p^4 - \frac{1}{3}p^4 = \frac{1}{3}p^4$ .

### Question 8.

La première équation peut s'écrire sous la forme  $\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ . Comme  $\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$  et  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , on reconnaît dans le membre de gauche de l'équation une formule d'addition de cosinus et l'équation est donc équivalente à  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . On en déduit que  $\frac{\pi}{6} - 2x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$  ou  $\frac{\pi}{6} - 2x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ , soit  $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$  ou  $x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]$ . Passons à la deuxième équation, qu'on peut simplifier de la même façon pour l'écrire  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ .

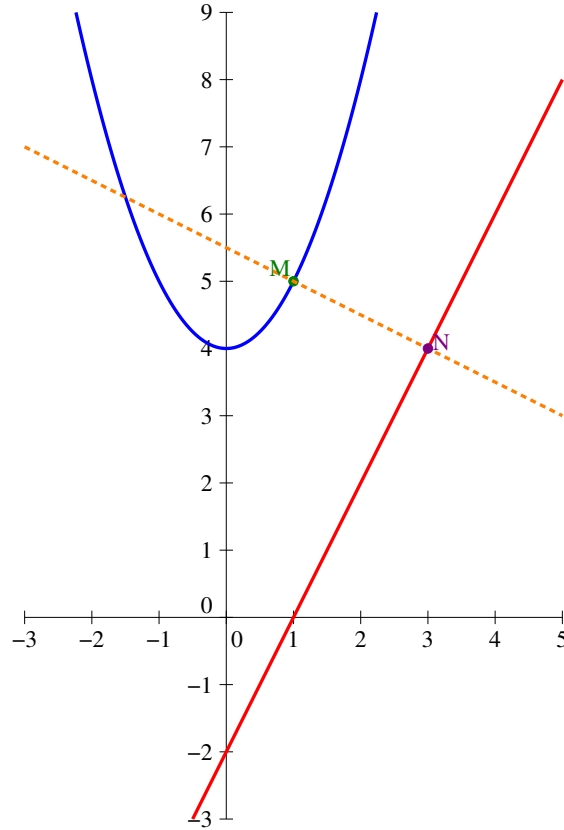
On en déduit que  $2x + \frac{\pi}{3} \equiv \pm \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ , d'où  $x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$  ou  $x \equiv -\frac{7\pi}{12} [\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi]$ . Les solutions communes aux deux équations sont donc tous les réels congrus à  $\frac{5\pi}{12}$  modulo  $\pi$ , soit dans l'intervalle imposé  $x_1 = \frac{5\pi}{12}$  et  $x_2 = \frac{17\pi}{12}$ . Leur somme est manifestement égale à  $\frac{11\pi}{6}$ .

### Question 9.

On sait que  $\int_0^1 f(x+1) dx = 6 = \int_1^2 f(x) dx$  (le changement de variable est tellement trivial que je ne l'écris même pas), donc la première équation donne  $2 \int_0^1 f(x) dx + 30 = 14$ , soit  $\int_0^1 f(x) dx = -8$ , puis  $\int_0^2 f(x) dx = -8 + 6 = -2$  via relation de Chasles.

### Question 10.

Attention, il ne suffit pas ici de minimiser la valeur de  $(x^2 + 4) - (2x - 2)$ , mais bien de trouver le point sur la parabole ayant un projeté orthogonal sur la droite qui soit le plus proche possible de lui (cf illustration ci-dessous). Soit donc un point  $M(a, a^2 + 4)$  appartenant à la parabole. Comme la droite d'équation  $y = 2x - 2$  a pour pente 2, le projeté orthogonal de  $M$  sur cette droite appartient à la perpendiculaire à la droite passant par le point  $M$ , c'est-à-dire à la droite de pente  $-\frac{1}{2}$  passant par  $M$ . Cette droite a pour équation  $y = -\frac{1}{2}(x - a) + a^2 + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2 + 4$ . Elle coupe donc la droite d'équation  $y = 2x - 2$  lorsque  $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2 + 4 = 2x - 2$ , donc pour  $\frac{5}{2}x = a^2 + \frac{1}{2}a + 6$ , soit  $x = \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{12}{5}$ . L'ordonnée du point correspondant vaut  $\frac{4}{5}a^2 + \frac{2}{5}a + \frac{14}{5}$ . On cherche donc à minimiser la distance (ou son carré, c'est équivalent), entre  $M$  et  $N \left( \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{12}{5}, \frac{4}{5}a^2 + \frac{2}{5}a + \frac{14}{5} \right)$ . Or,  $MN^2 = \left( \frac{2}{5}a^2 - \frac{4}{5}a + \frac{12}{5} \right)^2 + \left( -\frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{5}a - \frac{6}{5} \right)^2$ . Quitte à tout multiplier par 25, on doit donc minimiser  $f(a) = (2a^2 - 4a + 12)^2 + (a^2 - 2a + 6)^2 = 4a^4 + 16a^2 + 144 - 16a^3 + 48a^2 - 96a + a^4 + 4a^2 + 36 - 4a^3 + 12a^2 - 24a = 5a^4 - 20a^3 + 80a^2 - 120a + 180$ . Ok, il ne reste plus qu'à croiser les doigts pour trouver un minimum facilement, dérivons donc :  $f'(a) = 20a^3 - 60a^2 + 160a - 120 = 20(a^3 - 3a^2 + 8a - 6)$ . Miracle, cette dérivée a pour racine évidente  $a = 1$ . On factorise donc  $a^3 - 3a^2 + 8a - 6 = (a - 1)(ba^2 + ca + d) = ba^3 + (c - b)a^2 + (d - c)a - d$  (oui, mes notations sont moisies, je sais). Une petite identification donne  $b = 1$ , puis  $c - b = -3$  donc  $c = -2$ , et enfin  $d - c = 8$  donc  $d = 6$  (ce qui est cohérent pour le coefficient constant). Le trinôme  $a^2 - 2a + 6$  a le bon goût d'être tout le temps positif, la dérivée  $f'$  est donc du signe de  $a - 1$ , ce qui prouve que le minimum recherché est atteint pour  $a = 1$ . On va quand même donner sa valeur :  $f(1) = 125$ , donc  $MN^2 = 5$  (puisque'on a tout multiplié par 25 en cours de route), soit une distance minimale égale à  $\sqrt{5}$ . En effet, dans ce cas, le projeté a des coordonnées sympathiques :  $N(3, 4)$ , comme l'illustre la figure ci-dessous. Je soupçonne fortement que les étudiants auxquels cette question avait été posée disposaient d'un moyen moins barbare que le mien de trouver cette réponse, mais je ne sais pas lequel. Et puis, le calcul bourrin montre quand même l'efficacité d'une résolution violemment analytique.



### Problem 1.

- On doit donc résoudre l'équation  $3z + 1 = z^2 + 3z$ , soit  $z^2 = 1$ , ce qui donne pour points fixes 1 et  $-1$ .
- On résout dans le cas général l'équation  $az + b = cz^2 + dz$ , donc  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$ , et les formules données dans l'énoncé sont simplement celles des racines de cette équation du second degré.
- En posant  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , on a par définition  $f(\alpha) = \alpha$  et  $f(\beta) = \beta$ , donc  $\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = \frac{f(z) - \alpha}{f(z) - \beta} =$

$$\frac{az + b - (cz + d)\alpha}{az + b - (cz + d)\beta} = \frac{(a - c\alpha)z + b - d\alpha}{(a - c\beta)z + b - d\beta} = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta} \times \frac{z - \frac{d\alpha - b}{a - c\alpha}}{z - \frac{d\beta - b}{a - c\beta}}. \text{ Or } \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \alpha, \text{ donc } c\alpha^2 +$$

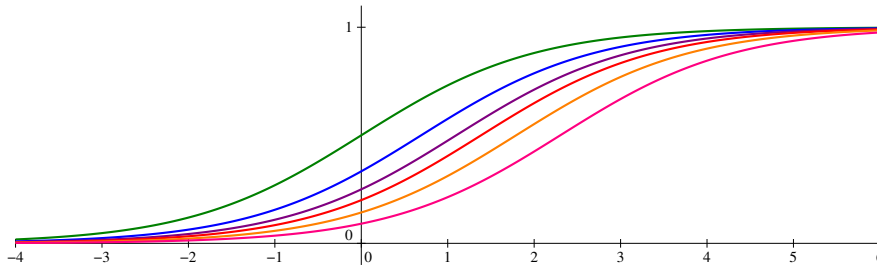
$$d\alpha = a\alpha + b, \text{ ou encore } a\alpha - c\alpha^2 = d\alpha - b, \text{ donc } \alpha = \frac{d\alpha - b}{\alpha - c\alpha}, \text{ et de même bien sûr pour}$$

$$\text{l'autre point fixe. Finalement, on a bien obtenu } \frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \text{ avec } k = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}.$$

### Problem 2.

Avec des notations plus habituelles, on doit résoudre l'équation différentielle  $y'(t) = y - y^2$ , avec pour condition initiale  $y(0) = y_0$ . Comme l'équation n'est pas franchement linéaire, on ne sait pas la résoudre par des méthodes classiques. Tentons le changement de variable  $y = \frac{1}{z}$  (on verra après si les solutions s'annulent, ce qui poserait évidemment problème), de façon à avoir  $y' = -\frac{z'}{z^2}$ . L'équation devient alors  $-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$ , soit  $-z' = z - 1$ , ou encore  $z' + z = 1$ . Cette équation, désormais linéaire, admet pour solution particulière évidente  $z_p : t \mapsto 1$ , et les solutions de l'équation homogène

associée sont de la forme  $z_h : t \mapsto Ke^{-t}$ . Les fonctions  $z$  solutions sont donc données par les équations  $z(t) = Ke^{-t} + 1$ , qui s'annulent si et seulement si  $K < 0$ . Dans le cas contraire, on aura des solutions  $y$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $y(t) = \frac{1}{1 + Ke^{-t}}$ . Si on impose  $y(0) = y_0$ , alors  $y_0 = \frac{1}{1 + K}$ , donc  $K = \frac{1}{y_0} - 1$ , qui sera strictement positif avec les précisions de l'énoncé. La fonction  $y$  sera donc définie sur  $\mathbb{R}$ , et vérifiera  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ . Comme les portaits de phase ne sont pas trop dans nos habitudes, je vais plutôt donner une allure des courbes intégrales (pour  $K > 0$ ) de l'équation : en vert pour  $K = 1$ , en bleu pour  $K = 2$ , violet pour  $K = 3$ , rouge pour  $K = 4$ , orange pour  $K = 6$  et rose pour  $K = 10$  :



### Problem 3.

1. La suite  $u_n$  définie par  $u_n = f^n(x)$  est une suite récurrente vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$ . L'intervalle  $[0, 1]$  étant par hypothèse stable par la fonction  $f$ , on montre par récurrence triviale que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ . De plus,  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$  par hypothèse, donc la suite est strictement décroissante. Étant déjà minorée, elle converge vers une limite qui ne peut être qu'un point fixe de la fonction  $f$  (supposée continue). Or, les seuls points fixes possibles sont 0 et 1 (puisque  $f(x) < x$  pour toutes les autres valeurs). Si  $x \neq 1$ , la suite étant strictement décroissante, elle ne pourra jamais converger vers 1, et converge donc nécessairement vers 0.
2. Non, il n'y a aucune raison que les valeurs de  $f^n(x)$  deviennent toutes inférieures à un  $\varepsilon$  donné pour un entier  $n$  commun à tous les  $x$ . En pratique, ce ne sera même jamais le cas si  $f(1) = 1$ . Prenons par exemple  $f(x) = x^2$ . On calcule alors sans problème  $f^n(x) = x^{2^n}$ . Si la propriété de l'énoncé était vraie, on devrait donc avoir, par exemple pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , un entier  $n$  pour lequel on aurait  $x^{2^n} < \frac{1}{2}$  sur tout l'intervalle  $]0, 1[$ . Mais c'est absurde dans la mesure où  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{2^n} = 1$  (la valeur de  $n$  étant fixée) et où la fonction  $x \mapsto x^{2^n}$  est bien sûr continue. Elle prend donc des valeurs strictement supérieures à  $\frac{1}{2}$  sur un voisinage de 1, ce qui contredit la propriété souhaitée.
3. Considérons une fonction définie sur  $[0, 1]$  de la façon suivante : si  $x$  est de la forme  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}$  pour un entier  $k \geq 1$ , alors  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$ , et pour tous les réels qui ne sont pas de cette forme, on pose  $f(x) = 0$  sans s'embêter. Autrement dit, on a imposé  $f(1) = \frac{3}{4}$ , puis  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$ , puis  $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{9}{16}$  et ainsi de suite. On constate aisément que la suite des valeurs obtenues à partir de  $x = \frac{3}{4}$  va converger vers  $\frac{1}{2}$  puisqu'on a simplement  $f^n\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}}$ . Elle ne converge donc pas vers 0.
4. La réponse est encore non, mais il faut se battre un peu plus pour réussir à trouver un contre-exemple. Dans la mesure où les suites récurrentes définies à la première question vont toujours converger (même si la fonction n'est pas continue, la suite reste décroissante et minorée par 0),

et où leur limite est nécessairement inférieure à la valeur initiale de  $x$ , il faut réussir à trouver une infinité de points d'accumulation pour la fonction  $f$ , c'est-à-dire de valeurs potentielles pour la limite de ces suites, et s'arranger pour que la suite converge systématiquement vers une de ces valeurs. On va par exemple prendre les valeurs de la forme  $\frac{1}{2^n}$  comme limites, et adapter la fonction déjà prise comme contre-exemple pour la question précédente :

- on impose que  $f$  soit constante égale à  $\frac{3}{4}$  sur l'intervalle  $\left] \frac{3}{4}, 1 \right]$ , puis constante égale à  $\frac{5}{8}$  sur l'intervalle  $\left] \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right]$ , constante égale à  $\frac{9}{16}$  sur l'intervalle  $\left] \frac{9}{16}, \frac{5}{8} \right]$ , et plus généralement constante égale à  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$  sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k} \right]$  pour tout entier  $k \geq 1$ . C'est la partie de la courbe représentée par les segments bleus (il y en a théoriquement une infinité !) sur le graphe présenté ci-dessous. Cette définition permet déjà d'assurer que, si  $x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ ,  $f^n(x)$  convergera vers  $\frac{1}{2}$  (toutes ces valeurs de  $x$  appartiennent à l'un des intervalles définis ci-dessus, donc seront envoyés par  $f$  sur un réel de la forme  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$  et ensuite la suite  $f^n(x)$  prendra des valeurs de la forme  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+k}}$  et convergera bien comme annoncé).
- on gère ensuite l'intervalle  $\left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$  exactement de la même façon, mais en effectuant une réduction d'échelle par rapport à ce qu'on a fait sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$  (la courbe sera « la même en deux fois plus petit »). Pour cela on peut simplement définir sur cet intervalle la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{f(2x)}{2}$ , ce qui donne les segments violets sur le graphe ci-dessous. Cette nouvelle définition assure la convergence de  $(f^n(x))$  vers  $\frac{1}{4}$  pour toutes les valeurs de  $x$  appartenant à  $\left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$  (même principe que ci-dessus).
- on continue en divisant à chaque fois l'intervalle restant en deux et en affectant un facteur  $\frac{1}{2}$  à l'échelle de la courbe. Ainsi, sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right]$ , on pose  $f(x) = \frac{f(4x)}{4}$ , et plus généralement sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ , on posera  $f(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$ . Ainsi, si  $x$  appartient à cet intervalle, la suite  $(f^n(x))$  convergera vers  $\frac{1}{2^{n+1}}$ , mais jamais vers 0. Comme tout réel strictement compris entre 0 et 1 est inclus dans (exactement) un intervalle de la forme  $\left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ , cette fonction fournit bien le contre-exemple souhaité. La courbe de la fonction  $f$  est par ailleurs un bel exemple de fractale invariante par changement d'échelle.

