

# Devoir Maison n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 12 septembre 2021

## Exercice 1

Le but de ce problème est d'étudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ . On notera  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

### A. Questions préliminaires.

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .
  - (a) Calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ , et déterminer son signe sur  $]0, +\infty[$ . En déduire les variations de la fonction  $g$ .
  - (b) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
2. Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = (2 - x)e^x - 1$ .
  - (a) Étudier la fonction  $h$  et dresser son tableau de variations.
  - (b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha > 1$ .
  - (c) Préciser le signe de  $h(x)$  en fonction de la position de  $x$  par rapport à  $\alpha$ .

### B. Étude de $f$ et tracé de la courbe $\mathcal{C}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = x$  (on pourra reprendre certains résultats obtenus dans la partie A).
5. Préciser l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 0.
6. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  en faisant figurer sur le dessin tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

### C. Étude d'une suite d'intégrales.

On pose pour cette dernière partie, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \int_0^n (f(x) - 1) dx$ .

1. Déterminer une primitive de la fonction  $f$ . En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Interpréter graphiquement la valeur  $u_n - u_1$ , puis le résultat obtenu à la question précédente.

## Exercice 2

On considère les deux propriétés suivantes concernant des entiers naturels  $n \geq 2$  :

- $A$  : l'entier  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8.
- $B$  : l'entier  $n$  est pair.

1. Écrire la contraposée de l'implication  $A \Rightarrow B$ .
2. Montrer qu'un entier naturel  $n$  impair peut s'écrire sous la forme  $n = 4k + r$ , avec  $r = 1$  ou  $r = 3$  et  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Démontrer la contraposée énoncée à la première question.
4. Les énoncés  $A$  et  $B$  sont-ils équivalents ?

## Exercice 3

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-3}$
2.  $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$
3.  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
4.  $|x^2 + 3x - 2| = |x^2 - x - 2|$ .