

Devoir Maison n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 12 septembre 2021

Exercice 1

Le but de ce problème est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On notera \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

A. Questions préliminaires.

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $g(x) = e^x - x - 1$.
 - (a) Calculer la dérivée g' de la fonction g , et déterminer son signe sur $]0, +\infty[$. En déduire les variations de la fonction g .
 - (b) Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Soit h la fonction définie par $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.
 - (a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variations.
 - (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 1$.
 - (c) Préciser le signe de $h(x)$ en fonction de la position de x par rapport à α .

B. Étude de f et tracé de la courbe \mathcal{C} .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis dresser le tableau de variations de f .
4. Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite d'équation $y = x$ (on pourra reprendre certains résultats obtenus dans la partie A).
5. Préciser l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 0.
6. Tracer la courbe \mathcal{C} en faisant figurer sur le dessin tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

C. Étude d'une suite d'intégrales.

On pose pour cette dernière partie, pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^n (f(x) - 1) dx$.

1. Déterminer une primitive de la fonction f . En déduire une expression de u_n en fonction de n .
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. Interpréter graphiquement la valeur $u_n - u_1$, puis le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2

On considère les deux propriétés suivantes concernant des entiers naturels $n \geq 2$:

- A : l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8.
- B : l'entier n est pair.

1. Écrire la contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$.
2. Montrer qu'un entier naturel n impair peut s'écrire sous la forme $n = 4k + r$, avec $r = 1$ ou $r = 3$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer la contraposée énoncée à la première question.
4. Les énoncés A et B sont-ils équivalents ?

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-3}$
2. $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$
3. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
4. $|x^2 + 3x - 2| = |x^2 - x - 2|$.