Bernhard Riemann

1826-1866

Sa vie.

Riemann, fils d'un pasteur de la région de Hanovre, est issu d'une famille modeste et souffrira de privations durant son enfance qui auront probablement une influence sur sa mauvaise santé future (tous ses frères et soeurs mourront d'ailleurs à un âge proche du sien). Ses dons pour les mathématiques sont rapidement remarqués, et il est autorisé par son père à poursuivre des études dans ce domaine. Il soutient sous la direction de Gauss une thèse brillante en 1851, qui pose les bases d'une nouvelle approche de la géométrie qui ne sera réellement comprise par ses pairs que bien après sa mort. Toute la carrière de Riemann se déroulera d'ailleurs dans un anonymat qui n'est pas conforme à la portée des résultats qu'il démontre ou annonce. Elle sera par ailleurs fort courte puisque Riemann souffre dès le début des années 1860 d'un début de tuberculose qui le contraint à ralentir fortement ses activités mathématiques et à laquelle il succombera deux mois avant de pouvoir fêter ses 40 ans.

Son oeuvre.

Même si on associe aujourd'hui son nom à des objets mathématiques couvrant plusieurs domaines, et notamment celui de l'intégration, Riemann était avant tout un très grand spécialiste de la théorie des fonctions complexes, qu'il utilisa pour créer une nouvelle approche révolutionnaire de la géométrie. C'est au cours de ces recherches en géométrie qu'il décrira la construction des intégrales de fonctions non continues à l'aide de séries qui portent désormais le nom de **sommes de Riemann**, mais aussi qu'il étudiera la désormais célèbre fonction ζ, annonçant la méthode qui permettra à Hadamard et de la Vallée-Poussin de démontrer le théorème des nombres premiers quelques décennies plus tard, et conjecturant la célèbre hypothèse que personne n'a réussi à prouver à ce jour. Ses travaux auront également une répercussion énorme en physique, et sont notamment à la base de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Sa postérité.

Si les travaux de Riemann ont été peu considérés de son vivant, il a aujourd'hui la place qu'il mérite au panthéon des mathématiques, et son nom est associé à un grand nombre d'objets fondamentaux. On a déjà cité plus haut les sommes de Riemann, qui sont à la base de la théorie de l'intégration appelée **intégrale de Riemann** (original, n'est-ce pas ?), ainsi que la célèbre **hypothèse de Riemann** sur l'emplacement des zéros de la fonction ζ ... **de Riemann** ! Cette fonction relie l'étude des nombres premiers à celle des nombres complexes et a une importance fondamentale dans les mathématiques modernes. Elle est définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (par exemple $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). La somme infinie converge naturellement pour tous les nombres complexes s vérifiant $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, mais on peut la prolonger à tout le plan complexe, sauf en 1. L'hypothèse de Riemann stipule alors que toutes les valeurs d'annulation de la fonction prolongée vérifient $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{1}{2}$. Un petit million de dollars si vous arrivez à le prouver. Le nom de Riemann est aussi associé à nombre de formules et objets plus purement géométriques, notamment les **surfaces de Riemann** (je ne peux pas vous expliquer simplement le concept général, mais l'une des plus simples d'entre elles, la **sphère de Riemann**, consiste à « transformer le plan complexe en sphère » en lui adjoignant un point « à l'infini » dont les voisinages sont tous les ensembles contenant tous les nombres complexes de module strictement supérieur à r pour un certain réel r) ou la **formule de Green-Riemann** (une horreur sans nom avec différentielles de fonctions à deux variables et intégrales doubles qui a son utilité en physique et qui était de mon temps au programme de prépa, je crois heureusement pour vous que ce n'est plus le cas).