Chapitre 1 : Ensembles, Logique.

MPSI Lycée Camille Jullian

9 septembre 2021

La logique est l'hygiène des mathématiques.

André Weil

Les mathématiques peuvent être définies comme une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai.

Bertrand Russell

Avant de pouvoir commencer à faire des mathématiques, il est essentiel d'en maîtriser un peu le fonctionnement, et surtout le langage (qui diffère quelque peu du langage courant). Ce premier chapitre de l'année, absolument essentiel à défaut d'être le plus attirant a priori, va donc introduire quelques petits éléments de théorie des ensembles (surtout du vocabulaire à vrai dire), la théorie « d'ensemble » (c'est le cas de le dire) dans laquelle se fondent tous les domaines des mathématiques actuelles, et s'attarder un peu sur les méthodes de démonstration et leur fonctionnement. Tous ces aspects assez théoriques des mathématiques sont en général regroupés sous le nom de « logique mathématique ».

Objectifs du chapitre :

- savoir utiliser correctement les différents symboles (quantificateurs, implications) introduits dans ce chapitre, et surtout comprendre parfaitement un énoncé mathématique écrit à l'aide de ces symboles.
- maîtriser le vocabulaire de base sur les ensembles.
- comprendre et savoir utiliser les méthodes de démonstration classique.

1 Vocabulaire sur les ensembles.

La logique est un domaine un peu à part au sein des mathématiques, essentiel à la construction même de l'ensemble de la théorie mathématique. À notre petit niveau, nous ne ferons rien de bien compliqué, contentons-nous de considérer la logique comme une sorte de grammaire des mathématiques. Pour bien comprendre le sens exact que l'on attribue à chaque énoncé que contient un texte mathématique, il est important de s'appuyer sur des bases rigoureuses. En ce qui concerne les ensembles, ils forment les briques élémentaires de la grande théorie des mathématiques qui est en cours aujourd'hui (les plus curieux d'entre vous iront se renseigner sur les axiomes de Zermelo-Fraenkel s'ils veulent vraiment en savoir plus).

1.1 Définitions.

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il peut être décrit de deux manières différentes :

- en extension, c'est-à-dire en donnant la liste de tous ses éléments, par exemple $E = \{1, 5, 6, 3\}$.
- en compréhension, c'est-à-dire en en définissant une propriété commune à tous les éléments de cet ensemble (qui est alors vu comme sous-ensemble d'un autre ensemble préalablement défini), par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 2n - 3 \geqslant 0\}$.

Les accolades sont systématiquement utilisées comme délimiteurs pour les définitions d'ensembles mathématiques, sauf dans le cas particulier des intervalles réels que nous évoquerons dans un prochain chapitre.

Définition 2. Le symbole $\in$ est un symbole d'**appartenance** : $x \in E$ signifie que l'objet désigné par la variable x est un des éléments de l'ensemble E. Le symbole $\subset$ est un symbole d'**inclusion** entre deux ensembles : $F \subset E$ si chaque élément de F est également un élément de E.

Méthode : Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on procèdera souvent par double inclusion, c'est-à-dire en prouvant séparément que $E \subset F$ et que $F \subset E$.

Définition 3. L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Remarque 1. Attention à ne pas noter incorrectement l'ensemble vide : la notation $\{\emptyset\}$ ne désigne pas du tout un ensemble vide, mais un ensemble à un élément, et cet élément est l'ensemble vide.

Rappel : Les principaux ensembles de nombres que vous avez déjà croisés dans vos études et que nous continuerons de manipuler cette année sont les suivants :

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels, qui peuvent s'écrire comme quotient de deux nombres entiers.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels (contenant, en plus des précédents, les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$, π ou e).
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes dont nous reprendrons l'étude détaillée dans un chapitre spécifique.

1.2 Opérations sur les ensembles.

Définition 4. Soient A et B deux ensembles, la **réunion** (ou plus simplement l'union) de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué de tous les éléments appartenant à A ou à B. L'**intersection** de A et de B est l'ensemble noté $A \cap B$ constitué de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B.

Remarque 2. On peut en fait définir beaucoup plus généralement l'union ou l'intersection de plus de deux ensembles, et même d'une infinité d'ensembles :

- x appartient à l'union $\bigcup_{i \in I} A_i$ si et seulement si x appartient à l'un (au moins) des ensembles A_i. Ici, l'ensemble I servant à indicer l'union peut donc être infini, on croisera régulièrement des cas où $I = \mathbb{N}$.
- x appartient à l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ si et seulement si x appartient à tous les ensembles A_i simultanément.

Par exemple, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{i}, i\right] =]0, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$, et $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[1, 1 + \frac{1}{i}\right[= \{1\}$.

Proposition 1. Propriétés des opérations d'union et d'intersection.

- associativité de l'union : si A, B et C sont trois ensembles, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- commutatitivé de l'union : si A et B sont deux ensembles, $A \cup B = B \cup A$.
- associativité de l'intersection : si A, B et C sont trois ensembles, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- commutatitivé de l'intersection : si A et B sont deux ensembles, $A \cap B = B \cap A$.
- double distributivité : si A, B et C sont trois ensembles, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. La commutativité des deux opérations est évidente avec les définitions qu'on en a données. L'associativité l'est à peine moins : on notera simplement $A \cup B \cup C$ l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des trois ensembles A, B et C sans que l'usage de parenthèses ne soit nécessaire, et de même pour l'intersection (on a d'ailleurs déjà généralisé ce principe en difinissant les unions et intersections quelconques).

Les deux propriétés de distributivité sont déjà plus intéressantes, prouvons par exemple la première en procédant par double inclusion. Supposons pour commencer que $x \in A \cup (B \cap C)$. On a donc deux possibilités : soit $x \in A$, ce qui implique que x appartienne à $A \cup B$ **et** à $A \cup C$, donc à $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; soit x appartient à B **et** à C, et donc à nouveau à $A \cup B$ **et** à $A \cup C$ pour la même conclusion. Dans les cas, on a prouvé que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, et donc que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Il reste à prouver l'inclusion réciproque : supposons désormais que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. En particulier, x appartient à A **ou** à B. Si $x \in A$, pas besoin de se préocupper du reste, $x \in A (B \cap C)$. Si par contre $x \notin A$, on a nécessairement $x \in B$. De même, comme $x \in A \cup C$, l'hypothèse $x \notin A$ implique que $x \in C$. On en déduit donc que $x \in B \cap C$, et a fortiori $x \in A \cup (B \cap C)$. On a prouvé que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, ce qui achève la preuve de l'égalité des deux ensembles.

La deuxième distributivité se prouve de façon similaire. Ces deux propriétés essentielles permettent de « développer » et de « factoriser » des mélanges d'unions et d'intersections de façon similaire à ce qu'on fait pour les opérations de sommes et de produit sur les nombres réels. Nous verrons plus tard dans l'année qu'un ensemble muni de deux opérations vérifiant ce type de propriétés est appelé **anneau commutatif**. □

Définition 5. Soient A et B deux ensembles, la **différence** de A et de B est l'ensemble $B \backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}$. Dans le cas particulier où A est un sous-ensemble de B, cette différence est appelée **complémentaire** de A dans B. Elle est également notée $\overline{A}$ ou $A^{\complement}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble B.

Proposition 2. Propriétés du complémentaire.

- $A \cup \overline{A} = B$ (il est sous-entendu qu'il s'agit d'un complémentaire dans l'ensemble B).
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (et plus généralement $\overline{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_i}$)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (et plus généralement $\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_i}$)

Ces deux dernières propriétés sont connues sour le noms de **lois de Morgan**.

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent très facilement de la définition (on ne peut pas à la fois appartenir à A et ne pas appartenir à A, par contre on vérifie forcément l'une de ces deux propriétés). La troisième est évidente.

Les lois de Morgan doivent également vous paraître très intuitives : ne pas appartenir à « A et B » signifie qu'on n'appartient pas à A **ou** qu'on n'appartient pas à B, et réciproquement. Pour donner un exemple très concret, si on note A l'ensemble des élèves de la classe qui ont les yeux bleus, et B l'ensemble des élèves de la classe qui portent des lunettes, l'ensemble $A \cup B$ est constitué des élèves ayant soit les yeux bleus, soit des lunettes. Son complémentaire $\overline{A \cup B}$ regroupe donc les élèves qui n'ont ni les yeux bleus ni des lunettes, ce qui correspond bien à $\overline{A} \cap \overline{B}$. □

Définition 6. Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.

Remarque 3. Cette notion se généralise sans problème à plus de deux ensembles. Lorsque les deux ensembles sont égaux, on notera E^2 plutôt que $E \times E$. De façon plus générale, on notera $E^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i \in E\}$.

Remarque 4. Il est essentiel de bien respecter les notations, notamment lorsqu'on donne des solutions d'équations ou de systèmes d'équations : $\{2, 3\}$ est un ensemble à deux éléments, mais $\{(2, 3)\}$ est un ensemble contenant un seul élément appartenant à $\mathbb{N}^2$.

Définition 7. L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est l'ensemble $\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subset E\}$.

Exemple : Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. On remarquera que l'ensemble des parties comprend $2^3 = 8$ éléments, ce qui n'est pas un hasard.

Plus amusant : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Définition 8. Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$. Une famille de sous ensembles $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de l'ensemble E si :

- les sous-ensembles A_i sont disjoints deux à deux
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Exemple : Les deux ensembles $A_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid i \textbf{ est pair}\}$ et $A_2 = \{i \in \mathbb{N} \mid i \textbf{ est impair}\}$ forment une partition de l'ensemble $\mathbb{N}$. Les partitions jouent un rôle essentiel en probabilités.

2 Quantificateurs.

Définition 9. Nous utiliserons tout au long de l'année dans nos énoncés de théorèmes et de propositions les deux symboles suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole $\exists$ signifie « il existe ». Ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0, 1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0, 1],\ f(x) = 0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit ». Ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur tout l'intervalle $[0, 1]$ s'écrit $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = 0$.

Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 5. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ce qui arrive très souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x \in \mathbb{R},\ f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).

- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \neq y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

En général, il faut retenir que, dans un énoncé commençant par $\forall x$, $\exists y$, la variable y dépend de x, alors que dans le cas où l'énoncé stipule $\exists y$, $\forall x$, le y est universel, il doit fonctionner pour toutes les valeurs de x possibles.

Remarque 6. Le symbole $\exists!$ pourra être utilisé pour annoncer l'existence **et l'unicité** d'un élément de l'ensemble vérifiant une propriété. Ainsi, l'énoncé $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ siginifie que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution (ce qui est bien sûr beaucoup plus fort qu'avec un simple quantificateur existentiel). Les notations $\nexists x \in E$ ou $\not\forall x \in E$ sont par contre à éviter car elles sont tout simplement inutiles (on va voir plus bas qu'il est toujours très facile d'écrire la négation d'un énoncé quantifié).

3 Propositions et implications.

3.1 Propositions mathématiques.

Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà manipulé sans vraiment le définir le concept flou d'« énoncé mathématique ». Sans chercher à être très complets sur le sujet (beaucoup plus vaste et complexe qu'il ne peut en avoir l'air au premier abord), donnons quelques définitions :

Définition 10. Une **proposition** mathématique est un énoncé cohérent qui est soit vrai (on dira qu'il prend la **valeur de vérité** V) soit faux (il prend la valeur de vérité F). De telles propositions font pratiquement systématiquement intervenir des quantificateurs et des variables mathématiques.

Remarque 7. Par « cohérent », on sous-entend que l'énoncé est syntaxiquement correct et a un sens mathématique. Ainsi, pour donner un exemple caricatural, « $\mathbb{R}\ f(x)\ \exists\forall y$ » n'est pas un énoncé syntaxiquement correct. Plus intéressant, « $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$ » n'est pas non plus une propriété correcte, car sa valeur de vérité dépend manifestement de la valeur prise par la variable x, qui n'a pas été quantifiée.

Définition 11. Une variable apparaissant dans un énoncé mathématique est **muette** si elle est quantifiée (donc si elle apparait à la suite d'un quantificateur universel ou existentiel dans l'énoncé). Dans le cas contraire, c'est une variable **libre**.

Une proposition ne peut faire intervenir que des variables muettes, puisque la valeur de vérité ne doit pas dépendre de celle des variables. Les variables muettes sont appelées ainsi car le nom de la variable n'a aucune importance, on peut le remplacer par n'importe quel autre. Par exemple, la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ » peut se réécrire de façon équivalente « $\forall \clubsuit \in \mathbb{R}, \clubsuit^2 \geqslant 0$ ».

3.2 Tables de vérité et connecteurs logiques.

Définition 12. Si P et Q sont deux propositions mathématiques, la proposition « P et Q » est vraie uniquement si les deux propriétés P et Q sont simultanément vraies. On peut la noter $P \wedge Q$. La proposition « P ou Q », aussi notée $P \vee Q$, est vraie uniquement si au moins l'une des deux propriétés P et Q est vraie.

Écrire la **table de vérité** d'une opération logique (opération reliant deux propositions) consiste tout simplement à donner la valeur de vérité de cette opération en fonction de celles des propositions, en faisant la liste de tous les cas possibles. Par exemple :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Remarque 8. On remarquera que le « ou » mathématique est toujours un ou **inclusif** (si les deux propriétés sont vraies simultanément, alors $P \vee Q$ est vraie), ce qui n'est pas toujours le cas dans le langage courant (par exemple, quand il est écrit « fromage ou dessert » sur une carte de restaurant, il est fortement sous-entendu qu'on n'est pas invité à prendre les deux).

Remarque 9. Les tables de vérité peuvent très bien être utilisées également pour démontrer des égalités entre ensembles (la similitude entre les opérations définies ci-dessus et celles d'union et d'intersection sur les ensembles est flagrante). Par exemple, on peut faire une table de vérité pour montrer les propriétés de distributivité vues plus haut en distinguant tous les cas d'appartenance ou non de la variable à chacun des ensembles. Prenons l'égalité qui n'évait pas été démontrée plus haut, à savoir $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \cup C$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap C$	$x \in (A \cap C) \cup (A \cap C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Il suffit de constater que la dernière colonne est identique à celle de « $x \in A \cap (B \cup C)$ » pour conclure. Cette méthode est tout de même bien lourde.

Définition 13. L'**implication** $P \Rightarrow Q$ signifie que la propriété Q est vraie dès que P l'est (par contre, si P est fausse, Q peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ signifie que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (aussi appelée **réciproque** de la précédente) sont vraies. Cela revient en fait à dire que les propriétés P et Q ont toujours la même valeur de vérité.

Une implication logique ne signifie absolument pas qu'il y a un lien de cause à effet entre les deux propositions, contrairement à ce qui se passe en général dans le langage courant. Ainsi, une implication absurde du type $(2 = 3) \Rightarrow (5 = 7)$ est logiquement vraie (la propriété de gauche étant fausse, elle implique n'importe quelle autre proposition). Pire, $(2 \neq 2) \Rightarrow (2 = 2)$ est tout aussi vraie.

On utilisera également le vocabulaire suivant : si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors P est une **condition suffisante** pour prouver la propriété Q (si P est vraie, Q le sera automatiquement aussi, donc il suffit de prouver P pour en déduire Q), et que Q est une **condition nécessaire** pour prouver la propriété P (cette fois, il faut que Q soit vraie pour que P puisse l'être mais ça ne suffit pas à l'assurer).

Méthode : Pour prouver une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on procède souvent en prouvant séparément les deux implications $A \Rightarrow B$, et $B \Rightarrow A$. Faites très attention à ne pas vous contenter de prouver l'une des deux implications.

Remarque 10. Toutes les démonstrations mathématiques sont fondées sur le principe de déduction suivant : si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. En pratique, on ne démontre que l'implication, la proposition initiale P étant déjà démontrée précédemment ou étant vraie de façon évidente. Comme il faut tout de même partir de quelque chose pour effectuer les premières démonstrations lorsqu'on construit une théorie mathématique, on appelle **axiomes** des propositions qui sont considérées comme vraies sans avoir été démontrées. Ces axiomes fournissant la base de toutes les démonstrations ultérieures, un des buts de l'étude de la logique mathématique est de créer des théories contenant le moins d'axiomes possibles. Cela pose toutefois des problèmes théoriques insolubles.

Définition 14. La **négation** d'une proposition P est une proposition dont la valeur de vérité est toujours opposée à celle de P. On peut la noter $\neg P$ (« non P »). La **contraposée** d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Remarque 11. Il est très facile d'écrire la négation d'un énoncé quantifié : toute quantification universelle du type $\forall x \in E$, $P(x)$ sera niée par une quantification existentielle $\exists x \in E$, $\neg P(x)$ (c'est le principe du **contre-exemple**), et inversement, toute quantification existentielle $\exists x \in E$, $P(x)$ sera niée par une quantification universelle $\forall x \in E$, $\neg P(x)$.

Proposition 3. Une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

Démonstration. Supposons **fausse** l'implication $P \Rightarrow Q$. Cela signifie que P est vraie et Q est fausse. Dans ce cas, $\neg Q$ est vraie, et $\neg P$ est fausse, donc la contraposée $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ est elle aussi fausse. Le même raisonnement permet de prouver que, si la contraposée est fausse, l'implication initiale l'est aussi, ce qui prouve l'équivalence logique des deux propositions. □

Remarque 12. On peut aussi constater l'équivalence logique suivante : $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $P \wedge (\neg Q)$. C'est le même principe que celui de la démonstration ci-dessus.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 13. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien sa contraposée, qui est équivalente au sens direct du théorème.

Remarque 14. La similitude entre union/intersection et opérations logiques permet d'étendre très facilement quelques propriétés démontrées plus haut pour les premières, notamment les lois de Morgan : $\neg(P \wedge Q)$ est équivalente à $(\neg P) \vee (\neg Q)$, et $\neg(P \vee Q)$ est équivalente à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$. La propriété élémentaire stipulant que la proposition $P \vee (\neg P)$ est toujours vraie est connue sous le nom de **principe du tiers exclu**, elle affirme qu'une proposition est nécessairement vraie ou fausse.

4 Méthodes de démonstration.

Nous allons conclure ce premier chapitre par une petite liste de types de démonstration à connaître. Comme précisé plus haut, une démonstration mathématique consiste en fait à prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$.

- démonstration par contraposée : au lieu de démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre la contraposée $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. Même si cette seconde version peut sembler a priori plus compliquée, elle peut très bien être beaucoup plus rapide à démontrer.

Exemple : si P, Q et R sont des propositions quelconques, on souhaite prouver que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q))$. Une possibilité brutale est de faire une table de vérité des huit cas possibles, mais ici, la contraposée peut se démontrer directement (l'énoncé initial, beaucoup moins). Supposons donc que $(R \Rightarrow P) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$, ce qui signifie que $R \Rightarrow P$ est vraie, mais $R \Rightarrow Q$ fausse. Cela ne peut se produire que si R est vraie, Q fausse et P vraie. Mais dans ce cas, $P \Rightarrow Q$ est fausse, ce qui prouve notre contraposée.

- démonstration par l'absurde : variation subtile du précédent, il s'agit de supposer que P est vraie et Q fausse, et d'aboutir à une absurdité. On démontre ainsi la proposition $\neg(P \wedge (\neg Q))$, ce qui est équivalent à démontrer $P \Rightarrow Q$.

Exemple : on souhaite prouver que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Si on veut formaliser les choses, on veut prouver l'implication $P \Rightarrow (\neg Q)$, où P est la proposition « $x^2 = 2$ » et Q la proposition « $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $x = \frac{a}{b}$ ». Ici, on va donc supposer que les deux propriétés P et Q sont vraies, donc qu'on a réussi à mettre sous la forme $\frac{a}{b}$ un nombre x vérifiant $x^2 = 2$, et chercher à obtenir à partir de là une absurdité. Quitte à simplifier la franction $\frac{a}{b}$, on peut toujours supposer qu'il s'agit d'une fraction irréductible (pas de facteur premier en commun entre numérateur et dénominateur). Partons alors de l'égalité $x^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$ pour en déduire $a^2 = 2b^2$. L'entier a^2 est donc pair, ce qui implique que a l'est aussi (résultat classique qu'on peut démontrer par contraposée : le carré d'un entier impair est toujours impair). On peut donc écrire $a = 2c$, avec $c \in \mathbb{N}$, dont on déduit $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$ puis $b^2 = 2c^2$. Comme b^2 est un entier pair, b également, et notre fraction $\frac{a}{b}$ n'est donc pas irréductible puisque quotient de deux entiers pairs. On a obtenu une contradiction, ce qui prouve que $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

- raisonnement par récurrence : nous reviendrons sur ce type de démonstration très classique dans un chapitre ultérieur. Il est toutefois d'ores et déjà admis que vous êtes capables de rédiger correctement une récurrence.
- raisonnement par analyse et synthèse. Raisonnement plus complexe intervenant quand on cherche à caractériser les solutions d'un problème, il consiste à supposer connue une solution de ce problème, et à essayer d'en déterminer le plus de caractéristiques possibles pour limiter le champ des solutions possibles (il s'agit en fait de déterminer des conditions nécessaires pour qu'un objet mathématique puisse être solution du problème). Une fois cette première étape effectuée, on vérifie quelles sont, parmi les solutions encore possibles, celles qui fonctionnent vraiment.

Exemple : on souhaite prouver le résultat classique suivant : toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut se décomposer comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Comme on n'a a priori aucune idée de ce à quoi vont ressembler les fonctions paire et impaire en question, le plus simple est de supposer qu'elles existent, et d'essayer d'obtenir des informations dessus. Supposons donc que $f = g + h$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire, et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Par définition, on a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = h(x)$. On en déduit que $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Or, on a supposé que $f(x) = g(x) + h(x)$. Il suffit d'additionner ces deux conditions nécessaires pour en déduire que $f(-x) + f(x) = 2g(x)$, autrement dit que g est nécessairement la fonction définie par $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$. De même, h sera nécessairement définie par $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Il reste à vérifier que cette unique possibilité est bien solution du problème initial, c'est-à-dire que les fonctions g et h ainsi définies sont respectivement paire et impaire (ce qui est ici très facile). On a ainsi prouvé, non seulement que le problème a une solution, mais aussi que cette solution est unique.