Chapitre 18 : Intégration

MPSI Lycée Camille Jullian

9 mars 2022

Les mathématiciens sont comme les français :
quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue,
et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Goethe

Qu'est-ce qu'un dilemme ?
Un lemme qui sert à prouver deux théorèmes !

Comment, encore de l'intégration ? On n'avait donc pas déjà tout vu dans le chapitre consacré aux équations différentielles ? Mais non, nous avions simplement travaillé la pratique (le calcul effectif d'intégrales) mais sans creuser la théorie : comment est définie la notion d'intégrale ? Nous comblerons ce manque en présentant la construction de l'intégrale de Riemann (il en existe d'autres plus sophistiquées), qui est notamment adaptée au calcul d'intégrales de fonctions continues (les seules qui nous intéresseront en pratique). Nous reverrons également également notre amie la formule de Taylor, sous une nouvelle forme faisant intervenir des intégrales.

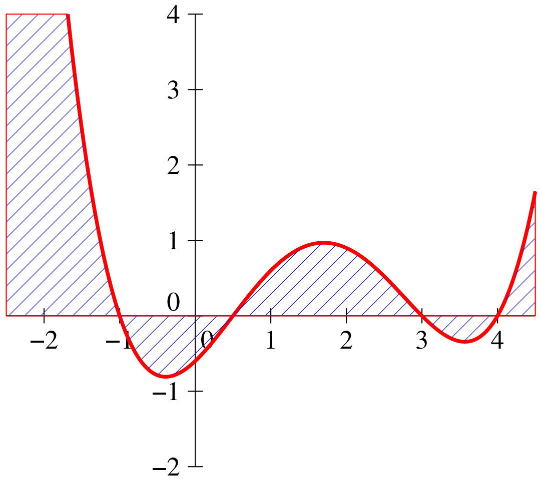
Objectifs du chapitre :

- comprendre comment ramener un calcul d'intégrales à celui d'aires de rectangles.
- comprendre comment la notion de primitive est reliée à la notion nettement plus géométrique de calcul d'aire.
- savoir utiliser les propriétés de l'intégration pour étudier des suites ou des fonctions définies par des intégrales.

Introduction.

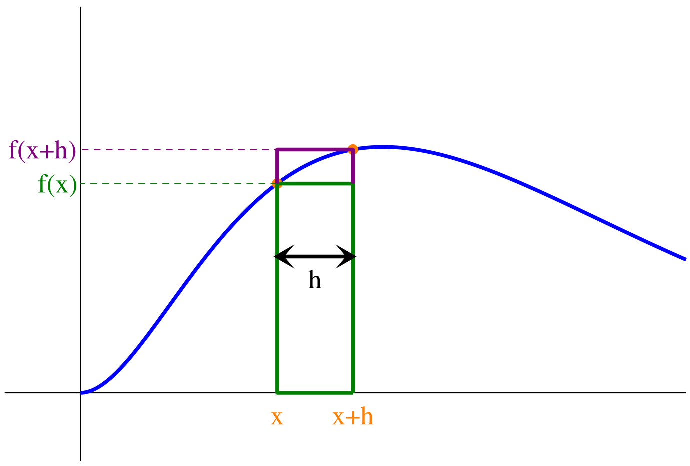
Avant de nous lancer dans le cours proprement dit, essayons de faire un petit calcul mal justifié permettant de comprendre comment ça fonctionne. L'intégration, comme vous le savez sûrement, a pour but de calculer des aires. Cette notion géométrique d'aire est loin d'être facile à définir et pose des problèmes de calcul effectif. Pour cela, comme vous le savez aussi, on recourt pour les calculs d'intégrale à la notion de primitive, qui est en quelque sorte l'opération inverse de la dérivation. Mais quel est le lien entre les deux ? Pour le comprendre, le plus simple est de se ramener à des calculs d'aires de formes géométriques très élémentaires : les rectangles.

Soit donc f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a, b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = x_0$, $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.



Théorème 1. La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration. (non rigoureuse) Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre x et $x + h$ (où h est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales tracées aux abscisses x et $x + h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de x (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :



On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur h dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x)$ et l'autre $f(x + h)$. On a donc $hf(x) \leqslant \mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x) \leqslant hf(x + h)$, ou encore $f(x) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leqslant f(x + h)$ (si on n'a pas supposé la fonction monotone, on remplacera simplement les bornes de cet encadrement par les valeurs minimale et maximale prises par f sur l'intervalle $[x, x + h]$). Mais on obtient alors, en faisant tendre h vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction f en x). En procédant de la même manière pour $h < 0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x) = f(x)$. □

Le principe de base de cette méthode (tracer des rectangles) est le principe fondamental d'une méthode de calcul approché d'intégrales dont nous reparlerons en fin de chapitre. En attendant, essayons de définir plus rigoureusement cette fameuse notion d'aire sous une courbe, encore une fois en utilisant des rectangles.

1 Construction de l'intégrale des fonctions continues.

Le but de cette partie est de construire « à la main » l'intégrale de fonctions suffisamment régulières (en pratique, continues ou presque) en la ramenant à celle de fonctions pour lesquelles le calcul d'intégrale correspond à celui d'une somme d'aires de rectangles. Le problème étant que ces fonctions (les fonctions en escalier) sont elle-mêmes assez loin d'être continues. On va donc devoir prouver qu'on peut obtenir les fonctions continues comme limites de telles fonctions, et qu'on peut étendre le calcul d'intégrale à l'aide d'une sorte de passage à la limite. C'est l'objet de toute la première partie de ce chapitre, pour laquelle nous allons avoir besoin d'introduire une nouvelle notion de continuité plus forte que celle que nous employons habituellement.

1.1 Continuité uniforme.

Définition 1. Une fonction f est **uniformément continue** sur un intervalle I si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall (x,y) \in I^2$, $|y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Cette définition fait bien sûr énormément penser à celle de la continuité en un point, mais la différence ici est que la constante η doit être la même sur tout l'intervalle (d'où le terme de continuité uniforme), alors que pour une fonction simplement continue en tout point de I, on peut trouver un tel η valable au voisinage de n'importe quel point, mais qui peut varier d'un endroit de l'intervalle à un autre. La notion qu'on vient de définir est donc plus forte que celle de continuité classique. D'ailleurs :

Proposition 1. Toute fonction uniformément continue sur intervalle I y est continue.

Tout fonction Lipschitzienne sur un intervalle I y est uniformément continue.

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. La deuxième aussi à vrai dire : si f est k-Lipschitzienne, on a toujours $|f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|$, il suffit donc de choisir $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ pour satisfaire à la définition de la continuité uniforme. □

Théorème 2. Théorème de Heine.

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration. On va démontrer ce théorème par l'absurde. Supposons donc f continue sur le segment $[a,b]$ mais pas uniformément continue. On peut alors trouver un $\varepsilon > 0$ pour lequel aucune valeur de $\eta > 0$ ne permet d'affirmer que $|y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Fixons donc un tel ε, on peut alors trouver, pour tout $\eta > 0$, deux réels x et y dans l'intervalle pour lesquels $|y-x| \leqslant \eta$ mais $|f(y)-f(x)| > \varepsilon$. En particulier, en posant $\eta = \dfrac{1}{n}$, on peut créer deux suites de réels (x_n) et (y_n)

telles que $|y_n - x_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers une limite $l \in [a,b]$. On aura alors également $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = l$ puisque $x_{\varphi(n)} - \dfrac{1}{n} \leqslant y_{\varphi(n)} \leqslant x_{\varphi(n)} + \dfrac{1}{n}$. Par continuité de la fonction f, on en déduit que $\lim f(y_{\varphi(n)}) = \lim f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$. Mais c'est contradictoire avec notre hypothèse $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$ (valable a fortiori pour les entiers $\varphi(n)$). On a obtenu une absurdité, la fonction f est donc uniformément continue sur $[a,b]$. □

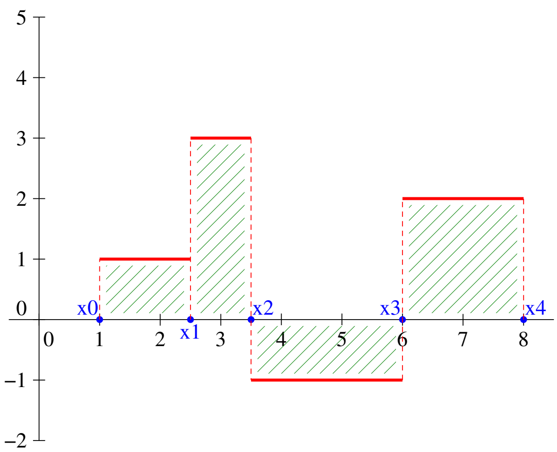
1.2 Fonctions en escalier.

Définition 2. Soit $[a,b]$ un segment, une liste de $n+1$ réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ constitue une **subdivision** du segment $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Remarque 1. En fait, il serait plus rigoureux de dire que les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, pour i variant entre 0 et $n-1$, constituent une subdivision de $[a,b]$.

Définition 3. Une fonction φ est une **fonction en escalier** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\varphi_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est une fonction constante. La subdivision est alors appelée **subdivision adaptée** à la fonction en escalier φ.

Remarque 2. Les valeurs prises par la fonction en x_0, x_1 etc n'ont aucune importance, et ne doivent pas nécessairement être égales à l'une des deux valeurs prises sur les intervalles ayant x_i pour borne. Un exemple de fonction en escalier sur le segment $[1,8]$ et de subdivision adaptée à cette fonction (les aires qui serviront plus loin à la définition de l'intégrale sont également indiquées) :



Proposition 2. L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment est un espace vectoriel réel.

Démonstration. Considérons donc deux fonctions φ et ψ, en escalier sur $[a,b]$, et τ et τ' deux subdivisions adaptées respectivement à φ et à ψ. La subdivision $\tau \cup \tau'$ (obtenue en prenant comme bornes des intervalles tous les réels qui sont bornes d'un intervalle de la première subdivision ou de la deuxième subdivision) est alors une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ. En effet, chacun des intervalles définis par $\tau \cup \tau'$ est inclus dans un des intervalles définis par τ, la fonction φ y est donc constante, et de même pour ψ (au pire, un intervalle sur lequel chaque fonction était constante sera découpée en plusieurs sous-intervalles, ce qui n'a aucune importance). Chacune des deux fonctions étant constante sur les intervalles définis par $\tau \cup \tau'$, la somme de φ et ψ le sera aussi, ainsi que les produits de φ et de ψ par des réels, et est donc aussi une fonction en escalier sur $[a,b]$. □

Définition 4. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à φ, alors l'**intégrale de φ sur le segment** $[a,b]$ est le nombre réel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\alpha_i$, où α_i est la valeur constante prise par φ sur l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx$.

Remarque 3. La variable x apparaissant dans la dernière notation introduite est une variable muette (comme l'indice d'une somme par exemple) qui peut être remplacée par n'importe quelle autre variable tant qu'on modifie également le dx qui suit : $\displaystyle\int_a^b \varphi(w)\ dw = \int_a^b \varphi(x)\ dx$.

Remarque 4. L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment ne dépend pas de la subdivision choisie.

Proposition 3. L'intégrale des fonctions en escalier vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

- linéarité : si φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)+\psi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_a^b \psi(x)\ dx$; si φ est en escalier, et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda\varphi(x)\ dx = \lambda\int_a^b \varphi(x)\ dx$
- relation de Chasles : $\forall c\in[a,b]$, $\displaystyle\int_a^c \varphi(x)\ dx + \int_c^b \varphi(x)\ dx$
- positivité : si la fonction φ est positive sur le segment $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant 0$

Démonstration. En prenant une subdivision adaptée simultanément à deux fonctions en escalier φ et ψ, la linéarité de l'intégrale découle de la distributivité des calculs de sommes. Notons α_i et β_i les valeurs respectives prises par φ et ψ sur les intervalles de la subdivision commune, alors $\displaystyle\int_a^b (\varphi+\psi)(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(\alpha_i+\beta_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\alpha_i + \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\beta_i = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_a^b \psi(x)\ dx$. Le produit par une constante est encore plus simple, il suffit de développer ou de factoriser la somme par λ. La relation de Chasles est une conséquence évidente de l'associativité de la somme (on ajoute c à la subdivision, ce qui ne change pas l'intégrale, et on sépare la somme en deux), et la positivité est carrément triviale : une somme de réels positifs est certainement positive. $\square$

1.3 Fonctions continues par morceaux.

Définition 5. Une fonction f est **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision de I telle que f soit continue sur chaque segment $]x_i,x_{i+1}[$ de la subdivision et admette des limites finies aux bords de chacun de ces segments.

Comme dans le cas des fonctions en escalier, les valeurs prises par la fonction f en x_i n'ont aucune importance.

Remarque 5. Comme les fonctions en escalier, les fonction continues par morceaux forment un espace vectoriel réel (la démonstration est essentiellement la même et donc sans grand intérêt). Notons également que le fait d'imposer des limites finies aux bords de chaque segment implique qu'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ y est toujours bornée (quitte à effectuer les prolongements par continuité aux bords, elle est constituée d'une succession de fonctions continues sur des segments auxquelles on peut appliquer le théorème du maximum).

Théorème 3. Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier.

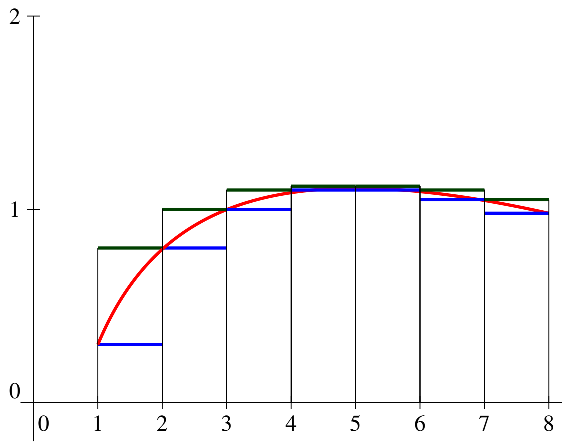
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et ε un réel strictement positif. Alors il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(x)-\varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \leqslant f(x)+\varepsilon$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Heine : f est uniformément continue sur $[a,b]$, on peut donc trouver un réel η tel que $|y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Si on fixe un tel η, on peut ensuite découper le segment $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles de même largeur η. En notant M_i la valeur maximale prise par f sur un tel intervalle (ce maximum existe nécessairement pour une fonction continue), on pose alors $\varphi(x) = M_i - \varepsilon$ sur l'intervalle correspondant, et on aura donc $M_i - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M_i$ sur tout l'intervalle (l'écart avec le maximum ne peut pas dépasser ε sur un intervalle de largeur η), ce qui est exactement ce qu'on souhaite. On pose symétriquement $\psi(x) = m_i + \varepsilon$ (où m_i est le minimum de f sur l'intervalle). Par construction, les fonctions φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$. Notons que la simple continuité ne suffit pas à démontrer ce théorème. En effet, si f est continue, on peut toujours construire petit à petit, à partir de la borne gauche a, des intervalles sur lesquels f sera minorée par une fonction en escalier comme on vient de le faire, mais la largeur de ces intervalles ne sera pas toujours le même. Si cette largeur devient de plus en plus petite, au point qu'on atteigne jamais la borne droite de l'intervalle en un nombre fini d'étapes (c'est tout à fait possible !), on n'obtiendra pas l'approximation souhaitée. □

Remarque 6. Le théorème reste valable pour une fonction qui est simplement continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Il sufit de l'appliquer morceau par morceau.

Théorème 4. En notant $\mathcal{E}^- = \{\varphi \text{ en escalier sur } [a,b] \mid \forall x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant f(x)\}$, et $\mathcal{E}^+ = \{\psi \text{ en escalier sur } [a,b] \mid \forall x \in [a,b], \psi(x) \geqslant f(x)\}$, alors $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\, dx = \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\, dx$.

Démonstration. Une petite illustration de ce théorème, qui dit simplement qu'on peut encadrer une fonction continue par deux fonctions en escalier, dont les intégrales peuvent être rendues aussi proches qu'on le souhaite (ici avec un pas constant, une fonction en escalier minorant f en bleu, et une majorant f en vert) :



La démonstration est en fait relativement simple avec le théorème précédent, mais elle utilise de façon un peu fine les notions de borne supérieure et inférieure. On peut déjà constater que $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-$, $\forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\int_a^b \varphi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\ dx$ (c'est par exemple une conséquence de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, en constatant que la fonction $\psi - \varphi$ est toujours positive). On en déduit que $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx \leqslant \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx$ (au passage cela prouve l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure, car le membre de gauche, par exemple, est majoré par l'intégrale de n'importe quelle fonction en escalier majorant f, et de telles fonctions existent). Ensuite, le théorème assure l'existence d'une fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) - \varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (qui est un nombre strictement positif comme les autres), mais aussi de $\psi \in \mathcal{E}^+$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $\psi(x) - f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. On a donc, $\forall x \in [a,b]$, $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. La fonction $\psi - \varphi$ a une intégrale positive et majorée par $\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$. Autrement dit, en appliquant la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\int_a^b \psi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\ dx + \varepsilon$. Cela prouve que $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx - \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie quelle que soit $\varepsilon > 0$, les deux membres sont nécessairement égaux. □

Définition 6. L'**intégrale de la fonction f sur le segment** $[a,b]$ est le nombre réel $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx = \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx$. On le note $\int_a^b f(x)\ dx$.

Proposition 4. Les trois propriétés fondamentales de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité) sont conservées pour les intégrales de fonctions continues sur un segment.

Démonstration. Cette démonstration un peu technique fait intervenir la caractérisation des bornes supérieure et inférieure. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, λ et μ deux réels, et $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une fonction en escalier φ majorée par f sur $[a,b]$ telle que $0 \leqslant \int_a^b f(x) - \varphi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. De même, il existe une fonction ψ majorée par g telle que $\int_a^b g(x) - \psi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}$. La fonction $\xi = \lambda\varphi + \mu\psi$ est alors une fonction en escalier majorée par $\lambda f + \mu g$ et telle que $\int_a^b \xi(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x) - \varepsilon$. Comme, par définition, $\int_a^b \xi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx$, on en déduit que $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx - \varepsilon$. Cela étant vrai quelle que soit la valeur de ε, $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$. On prouve l'inégalité dans l'autre sens de la même façon, à l'aide de fonctions en escalier majorantes, et on en déduit la linéarité.

La relation de Chasles est plus facile à prouver : si φ minore f sur $[a,b]$, alors la restriction de φ à $[a,c]$ et à $[c,b]$ minore les restrictions de f à chacun des deux intervalles, et $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant$

$\int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_c^b \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx$. Comme cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$, on en déduit que $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b f(x)\ dx$. Encore une fois, l'inégalité réciproque se prouve à l'aide de fonction en escalier majorantes, de la même manière.

Le dernier point est de loin le plus facile : si f est positive sur $[a,b]$, la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-$, et comme son intégrale est nulle, on en déduit que $\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. □

Remarque 7. On définit conventionnellement, pour tout reels a et b pour lesquels ça a un sens, que $\int_b^a f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)\ dt$. Avec cette convention, la relation de Chasles reste valable même quand certaines bornes d'intégrales ne sont pas dans le bon ordre. Par contre, bien entendu, la positivité ne reste vraie que si $a \leqslant b$.

La construction de l'intégrale présentée dans cette première partie de cours est appelée **intégrale de Riemann** car elle est historiquement basée sur la convergence des sommes de Riemann que nous évoqueront un peu plus loin. Elle permet de définir une intégrale (sur un segment) pour toutes les fonctions continues par morceaux (c'est ce qu'on a prouvé) mais aussi pour certaines fonctions supplémentaires pour lesquelles les limites d'intégrales de fonctions en escalier minorantes et majorantes sont égales sans que la fonction soit continue par morceaux. Une telle fonction est appelée **fonction réglée** mais cette notion est hors-programme. Il existe en fait d'autres façons de construire une notion d'intégrale qui englobe encore plus de fonctions que ces fonctions réglées. C'est notamment le cas de l'**intégrale de Lebesgue** fondée sur la théorie de la mesure, qui permet de plus de démontrer beaucoup plus facilement certains théorèmes classiques d'intégration. Mais tout ça n'est pas non plus à notre programme. Citons simplement un ou deux exemples de fonctions non continues par morceaux pour illustrer ce qui peut se passer en guise de conclusion de cette digression :
Exemple : La fonction f définie sur le segment $[0,1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ est une fonction qui n'est pas continue par morceaux (elle n'est continue en aucun point de $[0,1]$), et qui n'est pas non plus intégrable au sens de Riemann. En effet, tout fonction en escalier minorant f serait nécessairement négative sur chacun des intervalle où elle est constante (puisqu'un tel intervalle contiendrait nécessairement des irrationnels pour lesquels $f(x) = 0$), donc aurait une intégrale négative. Mais symétriquement, toute fonction en escalier majorant f serait minorée par 1 et aurait une intégrale supérieure ou égale à 1. On ne peut donc pas avoir égalité des bornes supérieure et inféreure d'intégrales de fonctions en escalier minorant et majorant f.

Si on modifie légèrement la fonction précédente pour imposer que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (en supposant $p \wedge q = 1$), alors la fonction devient intégrable au sens de Riemann, d'intégrale nulle. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut en effet construire une fonction en escalier ψ d'intégrale inférieure à 2ε majorant f, en imposant $\psi(x) = \varepsilon$, sauf dans un voisinage assez petit de chaque valeur rationnelle ayant une image par f supérieure à ε (il y en a un nombre fini) de façon à ce que l'intégrale de ψ cumulée sur ces voisinages ne dépasse pas ε. La borne inférieure des intégrales obtenues en faisant tendre ε vers 0 est alors nulle.

2 Propriétés supplémentaires de l'intégrale.

2.1 Intégration et inégalités.

Proposition 5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés précédentes : si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $\int_a^b g(x) - f(x)\ dx$. Il suffit alors d'appliquer la linéarité de l'intégrale pour conclure. □

Remarque 8. Ce résultat signifie simplement qu'on peut intégrer des inégalités. Il sera souvent appliqué dans un cas très particulier où l'une des deux fonctions est constante : si f est majorée par M et minorée par m sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M(b-a)$.

Proposition 6. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors f est nulle si et seulement si $\int_a^b f(x)\ dx = 0$.

Démonstration. Il y a une implication évidente, pour démontrer l'autre sens on procède par contraposée. Supposons que f ne soit pas nulle sur $[a, b]$. Il existe donc un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) > 0$ (même si le maximum de f est atteint en une borne de l'intervalle, par continuité, f restera strictement positive à l'intérieur). Par continuité, on peut en déduire l'existence d'un intervalle $]c-\eta, c+\eta[$ sur lequel $f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$. La fonction f est alors minorée par la fonction en escalier φ valant $\frac{f(c)}{2}$ sur $]c-\eta, c+\eta[$ et 0 ailleurs. Cette fonction en escalier ayant pour intégrale $\eta f(c) > 0$, on en déduit que $\int_a^b f(x)\ dx > 0$, ce qui prouve notre deuxième implication. □

Proposition 7. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente : $f \leqslant |f|$, donc $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. Mais comme $-f \leqslant |f|$ également, on peut aussi écrire $\int_a^b -f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. La combinaison des deux inégalités prouve la propriété. Cette propriété est d'ailleurs visuellement évidente, l'intégrale de $|f|$ revient à calculer positivement toutes les aires comprises entre la courbe et l'axe des abscisses (y compris sur les intervalles où f est négative), on obtient forcément une valeur plus grande qu'en calculant la valeur absolue de l'intégrale de f, où certaines portions peuvent être comptées négativement. C'est l'équivalent pour l'intégrale de l'inégalité triangulaire dans le cas de sommes finies. □

Proposition 8. Inégalité de Cauchy-Schwartz.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)$.

Démonstration. Cette inégalité très classique n'a en fait pas grand chose à voir avec les précédentes, puisqu'il s'agit d'un résultat de géométrie sur les produits scalaires que nous démontrerons d'ailleurs dans un cadre plus général en fin d'année. Nous pouvons toutefois la prouver dès à présent à l'aide d'une astuce de calcul calssique : si $t \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f(x)+tg(x))^2\ dx \geqslant 0$ (c'est l'intégrale d'une fonction continue et positive), donc en développant tout à l'aide de la linéarité, on a toujours $\int_a^b f^2(x)\ dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\ dx + t^2\int_a^b g^2(x)\ dx \geqslant 0$. On est donc en présence d'une expression du second degré (sauf si l'intégrale de g^2 est nulle, mais dans ce cas la fonction g est identiquement nulle sur $[a,b]$ et le résultat devient trivial) toujours positive, ce qui implique que son discriminant $\Delta = 4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\int_a^b f\int_a^b g$ soit négatif. C'est exactement le résultat qu'on souhaitait démontrer. □

Définition 7. La **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$.

Remarque 9. Cette valeur représente la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à celle donnée par l'intégrale de la fonction f, ce qui correspond bien à une notion de valeur moyenne.

Exercice : étude d'une suite d'intégrales. C'est un sujet d'exercices récurrent, pour lequel il faut connaitre les méthodes classiques. On définit une suite (I_n) par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt$.

1. Calculer les valeurs de I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), et en déduire la convergence de la suite.
3. En écrivant $1 - I_n$ sous la forme d'une intégrale, déterminer la limite de $1 - I_n$, puis celle de I_n.

Solution :

1. On calcule donc $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2}$, puis $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Notons que les valeurs suivantes des termes de la suite seraient nettement plus techniques à calculer (le calcul de I_3 avait été donne en exemple de calcul technique d'intégrale de fraction rationnelle dans le chapitre sur les équations différentielles). On est notamment complètement incapables de donner une expression explicite pour I_n (sinon l'exercice n'aurait pas grand intérêt).
2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\ dt$. Cette intégrale est celle d'une fonction positive sur $[0,1]$ (le dénominateur est clairement positif, et

sur $[0,1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$), donc $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (In). Une façon légèrement différente de rédiger ce calcul est de procéder par inégalités successives sur les fonctions intervenant sous l'intégrale, pour finir par intégrer les inégalités obtenues. La suite (I_n) est par ailleurs majorée, car $\dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$ sur $[0,1]$ (quelle que soit la valeur de n), donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 1\ dt = 1$. Elle converge donc.

3. Calculons $1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 1\ dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt$. Par la même majoration que tout à l'heure, $1 - I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Par ailleurs, $1 - I_n \geqslant 0$ puisque $I_n \leqslant 1$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - I_n = 0$, ce qui revient bien à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$.
Pour ceux qui auraient été tentés de produire un raisonnement du type : quand $t \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+t^n} = 1$ (ça c'est vrai) donc, par « passage à la limite », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 1\ dt = 1$, sachez qu'on ne peut absolument pas introduire comme cela une intégration dans un passage à la limite. Il faut vérifier des conditions techniques peu évidentes pour être certain que ça marche, et le théorème correspondant n'est absolument pas à votre programme cette année.

2.2 Lien avec les primitives.

Proposition 9. Soit f continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur I. Il s'agit de l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

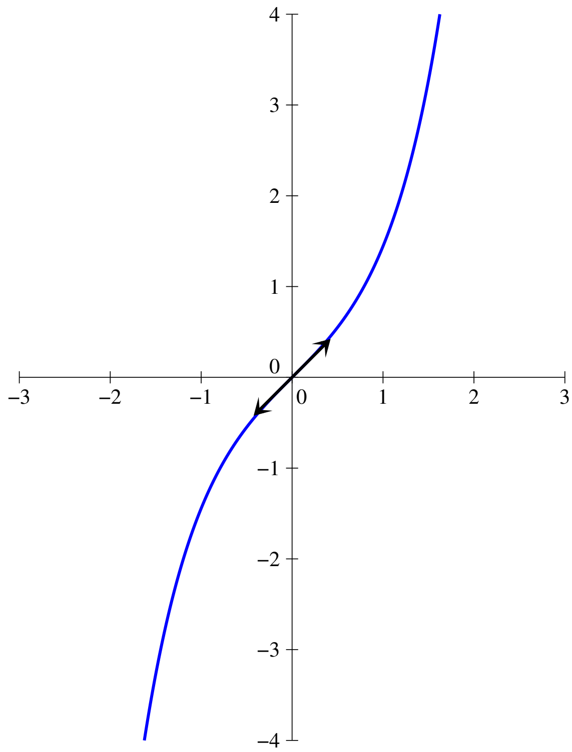
Démonstration. L'unicité est évidente : si deux primitives de f s'annulent en a, puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante et nécessairement nulle. La première partie du théorème revient à prouver rigoureusement le résultat donné dans l'introduction de ce chapitre. Fixons un réel $a \in I$ et considérons un autre réel $h > 0$ tel que $[a, a+h[\subset I$, on peut alors écrire $F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(x) + (f(t) - f(x))\ dt = F(x) + hf(x) + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\ dt$. Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue en x, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, $\forall t \in]x-\eta, x+\eta[$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. En intégrant cette inégalité entre x et $x+h$, on obtient $\left|\displaystyle\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\ dt\right| \leqslant \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\ dt \leqslant h\varepsilon$. En divisant tout par h, on obtient donc la majoration suivante : $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$, quitte à prendre des valeurs de h suffisamment proches de 0. Cette inégalité étant vraie pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$, soit $F'(x) = f(x)$. On a bien prouvé que la fonction F était une primitive sur I de f. □

Corollaire 1. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

Remarque 10. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur I. Ce résultat permet par exemple de justifier la définition de la fonction ln comme **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1. Il est tellement important qu'il est parfois désigné sous la dénomination de théorème fondamental de l'analyse.

Exemple : étude d'une fonction définie par une intégrale. On définit une fonction f par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t}\ dt$. On souhaite étudier le plus précisément possible la fonction f, sachant qu'on est incapables de calculer explicitement $f(x)$. Pour cela, commençons par poser $g(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}$, ce qui sera utile pour la suite.

- Comme $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$, le domaine de définition de f est constitué des valeurs x pour lesquelles 0 n'est pas compris dans l'intervalle $[x, 2x]$. Comme x et $2x$ ont toujours le même signe, la seule valeur problématique est $x = 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
- La fonction g est paire (quotient de deux fonctions impaires), donc f est impaire (en effet, les bornes vont se retrouver « dans le mauvais sens » quand on change le signe de x). Si on souhaite le prouver rigoureusement, on fait le petit changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale : $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\ dt = -\int_x^{2x} g(-u)\ du = -\int_x^{2x} g(u)\ du = -f(x)$. On peut donc se contenter d'une étude sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Le plus important est de savoir dériver ce type de fonctions. En notant G une primitive quelconque de g sur $]0, +\infty[$ (primitive qu'on ne sait bien sûr pas calculer explicitement), on peut dire que $\forall x > 0$, $f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$. On en déduit que $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2 \times \frac{\text{sh}(2t)}{2t} - \frac{\text{sh}(t)}{t} = \frac{\text{sh}(2t) - \text{sh}(t)}{t}$. Par croissance de la fonction sh, f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Pour déterminer les limites, on pourra souvent se contenter de majorations ou de minorations brutales. Ici, par exemple, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\text{sh}(t)}{t} = +\infty$ (par croissance comparée), donc $\exists a > 0$, $\forall t \geqslant a$, $g(t) \geqslant 1$ (ce n'est pas une minoration très subtile mais c'est largement suffisant !). Si $x \geqslant a$, toutes les valeurs de t comprises entre x et $2x$ vérifient cette inégalité, donc $f(x) \geqslant \int_x^{2x} 1\ dt = x$. C'est suffisant pour assurer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction étant impaire, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
- On procède de façon similaire en 0 : $\lim_{t \to 0} \frac{\text{sh}(t)}{t} = 1$ (il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sh, qui a donc pour limite $\text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$), donc il existe un réel a tel que, $\forall t \in]0, a]$, $0 \leqslant \frac{\text{sh}(t)}{t} \leqslant 2$ (cela revient à appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$). Quitte à se limiter à des valeurs de x inférieures à $\frac{a}{2}$ (pour que l'intervalle $[x, 2x]$ soit inclus dans $]0, a]$), on pourra alors écrire $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} 2\ dt = 2x$. Une simple application du théorème des gendarmes donne alors $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (on a ici calculé la limite à droite, mais la fonction étant impaire, la limite à gauche est identique). La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est en fait dérivable car $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2g(2x) - g(x) = 2 - 1 = 1$. Le théorème du prolongement de la dérivée assure donc que la courbe de f (prolongée en 0 par la valeur nulle) y admettra une tangente d'équation $y = x$.
- Une allure de courbe pour finir, mais l'impossibilité de calculer la moindre valeur rend le tracé à la main très imprécis :



2.3 Extension aux fonctions complexes.

Comme dans les précédents chapitres d'analyse, une fonction complexe est ici une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. On définit pour de telles fonctions la notion de continuité par morceaux exactement comme pour les fonction réelles.

Définition 8. Une fonction complexe f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ y admet une intégrale qui peut être définie par $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}\ (f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\ (f(t))\ dt$.

Autrement dit, on calcule simplement l'intégrale en séparant les parties réelle et imaginaire. On peut aussi exploiter les primitives (mais on ne sait calculer de primitives de fonctions complexes que pour les exponentielles), et les propriétés de linéairité et de relation de Chasles restent vraies. Par contre, bien entendu, la positivité n'a plus de sens. L'inégalité « triangulaire » $\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$ reste par contre valable en interprétant évidemment les « valeurs absolues » comme des modules.

2.4 Formules de Taylor, le retour.

Théorème 5. Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Démonstration. Pour comprendre (et même simplement retenir) cette formule, écrivons-là pour $n = 0$: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt$. En effet, cette égalité est pratiquement évidente puisque l'intégrale vaut $f(x)-f(a)$. Comment faire maintenant pour transformer le f' en f'' dans l'intégrale et obtenir la formule au rang suivant ? Tout simplement en faisant une IPP. On pose $u(t)=f'(t)$, soit $u'(t)=f''(t)$, et $v'(t)=1$. La seule subtilité consiste à choisir $v(t)=t-x$, qui est bien une primitive de v', et on trouve exactement la formule au rang 1. Plus généralement, la formule se prouve par récurrence. L'initialisation a déjà été prouvée, pour l'hérédité, on va faire une IPP en posant $u(t)=f^{(n+1)}(t)$, donc $u'(t)=f^{(n+2)}(t)$, et $v'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}$, soit $v(t)=-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On trouve alors $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x+\int_a^x\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt$. Le crochet valant $\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$, on trouve bien la formule au rang $n+1$. □

Théorème 6. Taylor 3, la vengeance : inégalité de Taylor-Lagrange.

Sous les mêmes hypothèses que pour la formule de Taylor avec reste intégral, en notant R_n le reste intégral, on a la majoration $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$, où $M_{n+1}=\sup\limits_{t\in I}|f^{n+1}(t)|$.

Démonstration. Il suffit de majorer le reste intégral obtenu dans le précédent théorème. On majore $|f^{n+1}(t)|$ par M_{n+1}, et il reste à calculer $\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt=\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. □

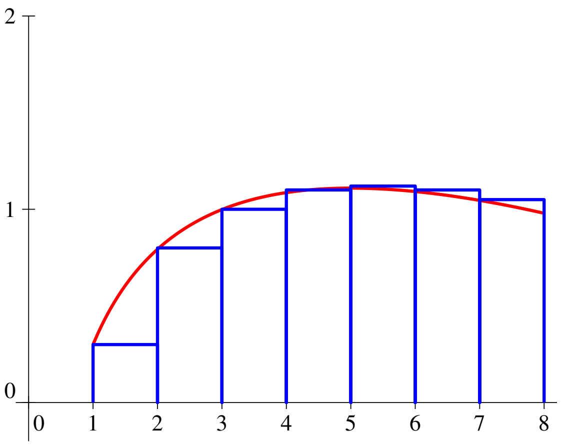
Exemple : En considérant $f(x)=\ln(1+x)$ et $a=0$, on prouve aisément que $\forall k\geqslant 1$, $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ (par récurrence si on tient à être rigoureux). La formule de Taylor avec reste intégral donne alors $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. En particulier, le polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0 est $T_n=x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. On peut par ailleurs constater que, si $x\geqslant 0$, le reste intégral de cette formule est majoré (en valeur absolue) par $\displaystyle\int_0^x(x-t)^n\,dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (ce qui correspond à la majoration donnée par Taylor-Lagrange). En particulier, cela prouve que, si $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)=\ln(1+x)$ (les approximations données par les polynômes de Taylor convergent donc vers la valeur prise par la fonction, ce qui n'est absolument pas garanti en général, et ne fonctionne d'ailleurs pas ici lorsque $x>1$).

3 Calcul numérique d'intégrales.

Dans la première partie de ce chapitre ainsi que dans nos incursions précédentes dans le domaine de l'intégration, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours. Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (en supposant qu'elle n'est pas trop calée en calcul formel) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente. Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connait pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles, pour obtenir le résultat rapidement. Nous allons en présenter trois, la première n'étant qu'une redite de choses vues dès la présentation de ce chapitre.

3.1 Sommes de Riemann.

Principe : On approche la courbe par des rectangles de largeur constante (en nombre fixé à l'avance) et de hauteur égale à l'image d'un des réels de chaque intervalle. Ainsi, en prenant un entier naturel non nul n et en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, on peut par exemple effectuer l'approximation suivante : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, où $x_k \in [a+kh, a+(k+1)h]$ (en pratique on posera simplement $x_k = a+kh$, soit la valeur à gauche de l'intervalle, même si on calculera parfois la somme avec $f(x_{k+1})$ au lieu de $f(x_k)$, ce qui revien à utiliser les valeurs à droite de chaque intervalle et non à gauche). Sur le dessin ci-dessous, on approche l'aire sous la courbe par la somme des aires des rectangles bleus, correspondant au choix de valeurs « à gauche » de chaque intervalle.



Définition 9. Une **somme de Riemann** associée à la fonction f sur le segment $[a,b]$ est une somme de la forme $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ ou $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, avec les mêmes notations que ci-dessus.

Théorème 7. Les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. De plus, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors $|I - S_n(f)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$, où $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Démonstration. Nous ne prouverons le théorème que dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Majorons l'erreur commise intervalle par intervalle : $\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - hf(x_k)\right|$ $= \left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\,dt$. Or, la fonction f ayant sa dérivée majorée en valeur absolue par M sur $[x_k, x_{k+1}]$, l'inégalité des accroissements finis nous assure que $\forall t \in [x_k, x_{k+1}]$, $|f(t)-f(x_k)| \leqslant M(t-x_k)$. On peut alors majorer notre erreur par $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} t - x_k\,dt = \left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[x_k, x_{k+1}]$ est donc de $\dfrac{M(b-a)^2}{2n^2}$, et l'erreur totale commise sur l'intervalle $[a,b]$ vaut au maximum n fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en n morceaux), soit $\dfrac{M(b-a)^2}{2n}$. On a bien prouvé que $|I - S_n(f)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$, ce qui suffit à prouver la convergence de $S_n(f)$ vers I puisque notre majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Un petit programme Python effectuant le calcul approchée d'intégrale à l'aide de la méthode des rectangles, en prenant comme paramètres la fonction f à intégrer, les bornes a et b de l'intervalle d'intégration, et le nombre n de rectangles souhaités dans le calcul :

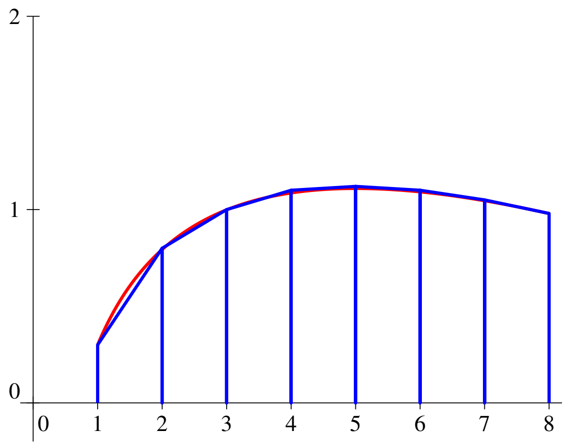
```
def rectangles(f,a,b,n) :
    h=(b-a)/n
    s=0
    for i in range(n) :
        s+=f(a+i*h)
    return h*s
```

Remarque 11. Les sommes de Riemann seront très souvent utilisées avec $a = 0$ et $b = 1$. On obtient alors la formulation simplifiée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx$.

Exemple : On utilise parfois les sommes de Riemann de façon indirecte pour trouver la limite de suites définies par des sommes, en utilisant leur convergence vers une intégrale qu'on sait calculer (c'est donc le processus complètement inverse de celui présenté dans cette partie de cours). Ainsi, si on pose $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$, on peut écrire $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3.2 Méthode des trapèzes.

Principe : Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse x_k et x_{k+1}. Autrement dit, on effectue l'approximation $\displaystyle I \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = h\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)$.



Remarque 12. La différence entre cette méthode et celle des rectangles est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n+1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire). Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

Théorème 8. En notant T_n la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la méthode des trapèzes, $\lim_{n \to +\infty} T_n = \int_a^b f(x)\ dx$. De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors $|I - T_n| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$, où $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Démonstration. L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais on a besoin pour le calcul d'un équivalent de l'IAF faisant intervenir la dérivée seconde. Cet équivalent est donné par la formule de Taylor-Lagrange, version « exacte » de l'inégalité de Taylor-Lagrange énoncée plus haut (la différence est exactement la même qu'entre les énoncés du théorème des accroissements finis et de l'IAF). On se dispensera donc de faire cette démonstration. □

On peut là aussi donner une implémentation en Python, à peine plus compliquée que la précédente :

```
def trapezes(f,a,b,n) :
    h=(b-a)/n
    s=(f(a)+f(b))/2
    for i in range(1,n) :
        s+=f(a+i*h)
    return h*s
```

3.3 Méthode de Simpson.

Principe : La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un arc de parabole, passant par les points d'abscisse x_k, x_{k+1} et $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole). Nous ne ferons pas les calculs, mais nous contenterons de donner la fomule d'approximation donnée par la méthode de Simpson : $I \simeq h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + 4f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})$. Cette méthode donnes des valeurs approchées de I qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes.

Théorème 9. En notant Z_n la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la méthode de Simpson, $\lim_{n \to +\infty} Z_n = I$. De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$, alors $|I - Z_n| \leqslant \dfrac{M_4(b-a)^5}{2\ 880 n^4}$, où $M_4 = \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x)$.

Remarque 13. Par construction, la méthode de Simpson donne des valeurs exactes pour les intégrales de fonctions polynômiales de degré 2. Mais elle en donne en fait aussi des valeurs exactes pour les fonctions de degré 3 (ce qui est beaucoup moins évident !), ce qui explique que la majoration de l'erreur « saute une étape » par rapport à la méthode des trapèzes.

On peut vérifier que la méthode donne bien une valeur exacte pour $f(x) = x^3$. En effet, $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}$, et le calcul par la méthode de Simpson (sans découper l'intervalle, c'est inutile ici) donne $(b-a) \times \dfrac{a^3 + 4(\frac{a+b}{2})^3 + b^3}{6} = (b-a) \times \dfrac{2a^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2b^3}{12} = (b-a) \times \dfrac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4} = \dfrac{b^4 - a^4}{4}$.