Feuille d'exercices n^o 23 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 mai 2022

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro (en soustrayant la mise de départ). On a donc $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3 \times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$ (on pouvaut bien entendu aussi remarquer que le nombre de 6 obtenus lors d'une série de lancers de dés suit une loi binomiale). On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $\mathbb{E}(X) = \frac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\frac{17}{216} \simeq -0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \frac{269}{216}$, donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57\ 815}{46\ 656} \simeq 1.24$ (soit $\sigma \simeq 1.11$).

Exercice 2 (* à **)

1. Pour déterminer la loi de X_1, peu importe l'ordre dans lequel on a effectué les trois premiers tirages. On peut donc considérer qu'on a tiré simultanément trois boules parmi les six de l'urne, ce qui fait au total $\binom{6}{3} = 20$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, un seul ne laisse aucune boule numéro 1 dans l'urne (il faut évidemment tirer les trois boules numéro 1). Symétriquement, un seul laisse trois boules numéros 1 dans l'urne. Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, soit $\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$ tirages convenables. Le nombre de tirages donnant $X_1 = 2$ vaut également 9 (la situation est en fait symétrique). Soit une loi pour X_1 donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

On calcule ensuite $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \dfrac{3}{2}$ (ou on invoque la symétrie de la loi pour justifier cette valeur), puis $\mathbb{E}(X_1^2) = \dfrac{1 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{20} = \dfrac{54}{20} = \dfrac{27}{10}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{27}{10} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{20}$.

2. Au minimum, il faudra trois tirages pour ne plus avoir de boules 1. Au pire, il en faudra bien sûr six. Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu plus haut que cela se produisait avec probabilité $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\dfrac{9}{20}$, comme vu à la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit finalement $\mathbb{P}(X_2 = 4) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{20}$. De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages (proba $\dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$) puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes, soit globalement $\mathbb{P}(X_2 = 5) = \dfrac{3}{10}$. Enfin, on obtient par soustraction ou par un raisonnement direct, $\mathbb{P}(X_2 = 6) = \dfrac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1). Finalement :

k	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

On peut alors calculer $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{3 + 12 + 30 + 60}{20} = \dfrac{105}{20} = \dfrac{21}{4}$, puis $\mathbb{E}(X_2^2) = \dfrac{9 + 48 + 150 + 360}{20} = \dfrac{567}{20}$, soit $\mathbb{V}(X) = \dfrac{567}{20} - \dfrac{441}{16} = \dfrac{63}{80}$.

3. Enfin du facile, X_3 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\dfrac{1}{6}$ chacune (si vous n'êtes pas convaincus, un peu de formule des probabilités composées devrait suffire à refaire les calculs).

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sans difficulté ici, $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{7}{2}$, $\mathbb{E}(X_3^2) = \dfrac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \dfrac{91}{6}$, soit $\mathbb{V}(X_3) = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{35}{6}$ (bien sûr on a aussi le droit d'appliquer directement les formules du cours pour les lois uniformes).

4. On peut obtenir au minimum une somme de 3 en trois tirages, au maximum une somme de 7. Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, on finit par savoir que la probabilité correspondante vaut $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $\dbinom{3}{2} \times \dbinom{2}{1} = 6$ tirages possibles (toujours sur 20 au total, bien entendu). Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 (trois possibilités), ou bien un 1 et les deux 2 (encore trois possibilités). Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 (encore six possibilités), et il reste une unique possibilité pour le 7.

k	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X_4 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Donc $\mathbb{E}(X_4) = 5$ (la loi est symétrique), $\mathbb{E}(X_4^2) = \dfrac{9+96+150+216+49}{20} = \dfrac{520}{20} = 26$ puis $\mathbb{V}(X_4) = 26 - 25 = 1$.

5. Au mieux, la somme atteindra 5 en deux tirages (un 3 et un 2). Au pire, ce sera au quatrième tirage (après avoir tiré trois 1, on sera obligé de tirer au moins un 2 lors du quatrième tirage). La probabilité de n'avoir besoin que de deux tirages est $\dfrac{2}{\binom{6}{2}} = \dfrac{2}{15}$, pour aller jusqu'à 4, il faut soit tirer les trois 1 lors des trois premiers tirages, ce qui fait une proba de $\dfrac{1}{20}$, soit tirer deux 1 et un 2 lors des trois premiers tirages, probabilité $\dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{6}{20}$. Finalement, $\mathbb{P}(X_5 = 4) = \dfrac{7}{20}$. Par soustraction, il reste $\mathbb{P}(X_5 = 3) = \dfrac{31}{60}$.

k	2	3	4
$\mathbb{P}(X_5 = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{7}{20}$

Donc $\mathbb{E}(X_5) = \dfrac{16+93+84}{60} = \dfrac{193}{60}$, $\mathbb{E}(X_5^2) = \dfrac{32+279+336}{60} = \dfrac{647}{60}$ et $\mathbb{V}(X_5) = \dfrac{1\ 571}{3\ 600}$.

Exercice 3 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(10, 0.7)$. On a donc $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $\mathbb{E}(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \dfrac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 4 (*)

1. Il s'agit d'un exemple standard de loi binomiale de paramètre $\left(6; \dfrac{2}{3}\right)$. On a donc $\mathbb{P}(R = k) = \dbinom{6}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{3^{n-k}} = \dbinom{6}{k}\dfrac{2^k}{3^n}$, $\mathbb{E}(R) = 4$ et $\mathbb{V}(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$. De même, la variable V suit une loi binomiale de paramètre $\left(6, \dfrac{1}{3}\right)$, donc $\mathbb{E}(V) = 2$ et $\mathbb{V}(V) = \dfrac{4}{3}$.
2. Sans remise, on est obligés de tirer une boule rouge au moins, donc $R(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Par ailleurs, l'événement $R = k$ est réalisé si on tire k boules rouges parmi les 10 et $6 - k$ boules vertes parmi les 5, donc $\mathbb{P}(R = k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}}$. Un peu de calcul à la main (ou à la calculatrice pour les plus paresseux) permet d'obtenir $\dbinom{15}{6} = 5\ 005$, et que les coefficients $\dbinom{10}{k}$ valent respectivement 10, 45, 120, 210, 252 et 210 quand k varie entre 1 et 6, et que pour ces mêmes valeurs, $\dbinom{5}{6-k}$ vaut 1, 5, 10, 10, 5 et 1. On peut donc dresser le magnifique tableau suivant pour la loi de R (on n'a volontairement pas simplifié les fractions) :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{10}{5\ 005}$	$\frac{225}{5\ 005}$	$\frac{1\ 200}{5\ 005}$	$\frac{2\ 100}{5\ 005}$	$\frac{1\ 260}{5\ 005}$	$\frac{210}{5\ 005}$

On en déduit que $\mathbb{E}(R) = \dfrac{10+450+3\,600+8\,400+6\,300+1\,260}{5\,005} = \dfrac{20\,020}{5\,005} = 4$. Belle simplification. On continue donc : $\mathbb{E}(R^2) = \dfrac{10+900+10\,800+33\,600+31\,500+7\,560}{5\,005} = \dfrac{84\,370}{5005} = \dfrac{118}{7}$, puis $\mathbb{V}(R) = \dfrac{118}{7} - 16 = \dfrac{6}{7}$. On peut s'étonner d'obtenir des résultats aussi simples, mais c'est normal puisque ce genre de variable suit une loi classique appelée loi hypergéométrique, mais dont l'étude n'est pas à votre programme.
N'oublions tout de même pas la variable V. Inutile de refaire les calculs, il suffit de se rendre compte que $V + R = 6$, donc $V = 6 - R$. On en déduit que $V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et $\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(R = 6-k) = \dfrac{\binom{10}{6-k} \times \binom{5}{k}}{\binom{15}{6}}$. On aura, d'après les propriétés de l'espérance et de la variance, $\mathbb{E}(V) = 6 - \mathbb{E}(R) = 2$ et $\mathbb{V}(V) = \mathbb{V}(R) = \dfrac{6}{7}$.

Exercice 5 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\,296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $\mathbb{P}(A_6) = \dfrac{6^4}{6^4} = 1$, $\mathbb{P}(A_5) = \dfrac{5^4}{6^4} = \dfrac{625}{1\,296}$, $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{4^4}{6^4} = \dfrac{256}{1\,296}$, $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{81}{1\,296}$, $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{16}{1\,296}$ et enfin $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{1\,296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(A_6) - \mathbb{P}(A_5) = \dfrac{1\,296 - 625}{1\,296} = \dfrac{671}{1\,296}$, $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(A_5) - \mathbb{P}(A_4) = \dfrac{369}{1\,296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{1\,296}$	$\frac{15}{1\,296}$	$\frac{65}{1\,296}$	$\frac{175}{1\,296}$	$\frac{369}{1\,296}$	$\frac{671}{1\,296}$

On a donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1+30+195+700+1\,845+4\,026}{1\,296} = \dfrac{6\,797}{1\,296} \simeq 5.24$, puis $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{1+60+585+2\,800+9\,225+24\,156}{1\,296} = \dfrac{36\,827}{1\,296}$, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \simeq 0.91$ (non, je ne me fatigue même pas à écrire l'ignoble fraction exacte qui ne se simplifie pas du tout), soit $\sigma \simeq 0.95$.

Exercice 6 (*)

Supposons donc que nous ayons réussi à truquer les deux dés de façon à avoir une somme uniforme. Cela revient à dire qu'on a réussi à imposer une distribution de probabilités sur les entiers de 1 à 6 telle que, $\forall i \in \{2, \dots, 12\}$, $\mathbb{P}((X+Y) = i) = \dfrac{1}{11}$, en notant X et Y deux variables indépendantes ayant une loi définie par cette distribution de probabilités. En particulier, puisque la seule façon d'obtenir une somme égale à 2 est d'avoir $X = Y = 1$, on devrait avoir $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. De même, on aura $\mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$ (seul un double 6 permet d'obtenir une somme égale à 12). Mais alors on a déjà $\mathbb{P}(X + Y = 7) \geqslant 2 \times \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 6) \geqslant \dfrac{2}{11}$ (puisqu'on peut otenir une somme égale à 7 en obtenant 1 sur le premier dé et 6 sur le second, ou le contraire). On a obtenu une contradiction, le truquage n'est donc pas possible (on aurait aussi pu calculer les probabilités qu'on devait imposer pour les autres faces et obtenir d'autres contradictions, par exemple le fait que la somme des six probabilités ne donne pas du tout 1).

Exercice 7 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n, $n-1$, ..., 4, 3, 1, 2), donc $X(\Omega) = \{2, \dots, n\}$. On conviendra par ailleurs que $X = n$ si on a tiré toutes les boules en ordre strictement décroissant.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grand que le premier : 123, 132 et 231, donc $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et donc trois pour lesquels $X = 3$, donc $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\frac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{10 \times 3!}{120} = \frac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{4 \times 3! + 8 \times 2!}{120} = \frac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{6 \times 2! + 3}{120} = \frac{1}{8}$. Enfin, on aura $X = 5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \simeq 2.71$.

   Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X = k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X = 4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\binom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!} = \frac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k = n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{n}{n}(n-1)0! + 1}{n!} = \frac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{k!} + n \times \frac{n}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{1}{k!} + \frac{n^2}{n!}$.

3. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = e$ (on reparlera de ce résultat dans un prochain chapitre consacré aux séries), donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X) = e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 8 (**)

1. Il y a $\binom{2n}{2k}$ tirages possibles au total (l'ordre de tirage n'a aucune importance), dont $\binom{2n-2}{2k-2}$ où on a tiré les deux chaussures de la paire numéro i (deux tirages sont imposés, il reste donc $2k-2$ tirages à effectuer dans l'ensemble de chaussures où on a supprimé les deux chaussures de la paire i). Autrement dit, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{2n-2}{2k-2}}{\binom{2n}{2k}} = \frac{(2n-2)!}{(2k-2)!(2n-2k)!} \times \frac{(2k)!(2n-2k)!}{(2n)!} = \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)}$. Puisqu'il s'agit d'une variable indicatrice suivant une loi de Bernoulli, on a donc simplement $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{k(2k-1)}{n(2n-1)}$. La variance est également simple à donner, même si la formule est laide : $\mathbb{V}(X_i) = \frac{k(2k-1)}{n(2n-1)}\left(1 - \frac{k(2k-1)}{n(2n-1)}\right)$ (inutile de développer quoi que ce soit, on ne trouvera pas d'expression très engageante).
2. La définition de la variable X donne immédiatement $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La linéarité de l'espérance permet alors d'affirmer directement que $\mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X_i) = \frac{k(2k-1)}{2n-1}$. Par exemple, si on a quatre paires de chaussures dans le placard (donc $n = 4$) et qu'on tire quatre chaussures au hasard (donc $k = 2$), on aura en moyenne $\frac{2\times 3}{7} = \frac{6}{7}$ paires de chaussures complètes. Si on tire six chaussures ($k = 3$), le nombre de paires moyen monte à $\frac{3\times 5}{7} = \frac{15}{7}$.

Exercice 9 (**)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\frac{N}{n}, 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\frac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\frac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \frac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $\mathbb{E}(Y) = \frac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $100 + 1\ 000(1 - 0.99^{10}) \simeq 196$. Il est donc nettement plus avantageux de regrouper les tests !

Exercice 10 (**)

1. Notons pour commencer Y_n le nombre de jours où la valeur de l'action a augmenté. On est dans une situation de schéma de Bernoulli (probabilité p de hausse chaque jour, de façon indépendante d'un jour sur l'autre), donc $Y_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. En particulier, $\mathbb{E}(Y_n) = np$. Or, en partant de la valeur 1, la valeur de notre action au jour n sera obtenu en multipliant α autant de fois qu'il n'y a eu de jours de hausse, et en faisant le produit par β élevé à une puissance égale au nombre de jours de baisse. Autrement dit, $X_n = \alpha^{Y_n}\beta^{n-Y_n}$. On peut donc écrire $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k}\mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\beta^{n-k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\alpha)^k(q\beta)^{n-k} = (p\alpha + q\beta)^n$ en exploitant la formule du binôme de Newton et en posant $q = 1-p$.

   On va bien sûr appliquer la formule de König-Huygens pour obtenir la variance. On obtient $\mathbb{E}(X_n^2)$ en appliquant exactement la même technique que ci-dessus : $\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=0}^{n}\alpha^{2k}\beta^{2n-2k}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\alpha^2)^k(q\beta^2)^{n-k} = (p\alpha^2+q\beta^2)^n$. On en déduit que $\mathbb{V}(X_n) = (p\alpha^2+q\beta^2)^n - (p\alpha+q\beta)^{2n}$ (non, on ne cherchera pas à simplifier cette expression).
2. D'après la question précédent, on a désormais $\mathbb{E}(X_n) = \left(p\alpha + \frac{1-p}{\alpha}\right)^n$. Si on souhaite une espérance égale à 1, il faut donc imposer $p\alpha + \frac{1-p}{\alpha} = 1$, soit $p\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha}$, ou encore $p = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$. Remarquons en passant que cette valeur est toujours strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, si on est dans une situation d'équilibre entre hausses et baisses, la valeur moyenne de l'action augmentera. Si $p > \frac{1}{\alpha+1}$, on aura $\mathbb{E}(X_n) = z^n$ avec $z > 1$, donc l'action va voir sa valeur senvoler (en moyenne). Au contraire, si $p < \frac{1}{\alpha+1}$, la valeur moyenne de l'action va tendre vers 0.
3. On a désormais $\mathbb{E}(X_n) = (p(1+h)+(1-p)(1-h))^n = (1-h+2ph)^n$. L'espérance est donc égale à 1 si $1-h+2ph = 1$, soit $p = \frac{1}{2}$. On peut alors simplifier $\mathbb{V}(X_n) = \left(\frac{(1+h)^2}{2} + \frac{(1-h)^2}{2}\right)^n - \left(\frac{1+h}{2} + \frac{1-h}{2}\right)^{2n} = (1+h^2)^n - 1$.

Exercice 11 (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, \min(n, N)\}$.
2. Après un lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans laquelle on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $\mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $\mathbb{P}(T_n = 1) =$

$\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times (2^n - 2)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{N(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^n}$.

Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$. Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$.

4. Les évènements $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbb{P}(T_n = i)\mathbb{P}_{T_n=i}(T_{n+1})$. Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $\mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$), soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes : $\mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.

5. (a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{P}(T_n = k) = 1$.

   (b) Calculons : $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} k\mathbb{P}(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $\mathbb{E}(T_n)$, qui est donc égale à $G_n'(1)$.

   (c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :

   $G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)\right) x^k$

   $= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + (N-k+1)\mathbb{P}(T_n = k-1)x^k$

   $= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1}$

   $= \frac{x}{N}G_n'(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} N\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1}$

   $= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncée (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

   (d) Dérivons donc : $G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $\mathbb{E}(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}\mathbb{E}(T_n) + 1 + \mathbb{E}(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$.

(e) Notons $u_n = \mathbb{E}(T_n)$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N}u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.

Exercice 12 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $\mathbb{P}(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit $X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n-1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $\mathbb{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.
4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l - k$ au second tour, autrement dit que $X = k$ et $Y = l - k$. On a donc bien $\mathbb{P}(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. On sait que $X = k$, il y a donc $n - k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X=k}(Y = h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n - k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0, 1, \dots, n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h}p^h(1-p)^{n-k-h}$. On a donc $\mathbb{P}(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{X=k}(Y = l-k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\binom{n-k}{l-k}p^{l-k}q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}p^l q^{2n-k-l}$.
6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
$\mathbb{P}(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k}p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l}p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^{k=l} \binom{l}{k} q^{l-k} = \binom{n}{l}p^l(1+q)^l(q^2)^{n-l}$.

7. Comme $p(1+q)=(1-q)(1+q)=1-q^2$, on a $\mathbb{P}(Z=l)=\binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n, 1-q^2)$.
8. La probabilité qu'un correspondant donné ne soit joint ni au premier, ni au deuxième tour vaut q^2, donc celle qu'on le joigne à un tour ou à l'autre est de $1-q^2$. Comme on répète cette expérience sur chacun des n correspondants, on est bien dans une situation de loi binômiale de paramètre $(n, 1-q^2)$.

Exercice 13 (***)

1. (a) Calculons donc : $(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k = 1+\sum_{k=1}^{n-1} q^k - nq^n = 1-nq^n+\frac{1-q^n}{1-q}-1 = \frac{1-q^n}{1-q}-nq^n$. En particulier, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \frac{2}{1-2}\left(\frac{1-2^n}{1-2}-n2^n\right) = n2^{n+1}+2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1}+2$.

   (b) Puisqu'on nous donne gentiment la formule, démontrons-là par récurrence. Au rang 1, la somme vaut 2, et le membre de droite $2\times 4-6=2$, donc ça va. Supposons la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k + (n+1)^2 2^{n+1} = (n^2-2n+3)2^{n+1}-6+(n+1)^2 2^{n+1} = (n^2-2n+3+n^2+2n+1)2^{n+1}-6 = (2n^2+4)2^{n+1}-6 = (n^2+2)2^{n+2}-6$. Il ne reste plus qu'à constater que $(n+1)^2-2(n+1)+3 = n^2+2n+1-2n-2+3 = n^2+2$ pour prouver la formule au rang $n+1$ et achever la récurrence.

2. (a) Il faut commencer par compter le nombre total de boules dans l'urne : $2+\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2+\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-1 = 1+2^{n+1}-1 = 2^{n+1}$. On a donc logiquement $\mathbb{P}(X=0)=\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$, et pour tour $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{2^k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1-k}}$.

   (b) Calculons donc l'espérance, en oublions la valeur particulière 0 qui n'intervient de toute façon pas dans le calcul : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2) = n-1+\frac{1}{2^n}$. Pour la variance, on va avoir besoin de $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = n^2-2n+3-\frac{6}{2^{n+1}}$. Ensuite, on applique bien sûr la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = n^2-2n+3-\left(n-1+\frac{1}{2^n}\right)^2 = n^2-2n+3-n^2+2n-1-\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n} = 2+\frac{1-n}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}$.

3. (a) Si $k=0$, alors $\mathbb{P}_{X=0}(Y=0)=1$ et $\mathbb{P}_{X=0}(Y=i)=0$ si $i \neq 0$. Plus généralement, $\mathbb{P}_{X=k}(Y=i)=0$ si $i \geqslant k$ puisque les boules correspondantes ont été supprimées. Par contre, si $0<i<k$, $\mathbb{P}_{X=k}(Y=i)=\frac{2^i}{2^k}=\frac{1}{2^{k-i}}$. Dernier cas, si $k \neq 0$, $\mathbb{P}_{X=k}(Y=0)=\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

   (b) On peut appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements constitué des $X=k$. On obtient alors $\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}_{X=0}(Y=0)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=$

$k) \times \mathbb{P}_{X=k}(Y=0) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{2^{n+1}} \times \dfrac{2}{2^k} = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^n}$. De même, si $i \neq 0$, $\mathbb{P}(Y=i) = \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \times \mathbb{P}_{X=k}(Y=i) = \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} \dfrac{2^k}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^i}{2^k} = \dfrac{(n-i)2^i}{2^{n+1}} = (n-i)2^{i-n-1}$.

(c) Vérifions : $\dfrac{n+1}{2^n} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)2^{i-n-1} = \dfrac{n+1}{2^n} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{n-i}{2^{n-i+1}} = \dfrac{n+1}{2^n} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{i}{2^{i+1}} = \dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{i}{2^{i-1}} = \dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \dfrac{n-1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{n+1}{2^n} + 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{n-1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} + 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1$. Ouf, ça marche !

(d) Allez, un dernier calcul : $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)2^{i-n-1} = \dfrac{n}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i2^i - \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 2^i = \dfrac{n}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2) - \dfrac{1}{2^{n+1}}((n^2-2n+3)2^{n+1}-6) = n(n-1) + \dfrac{n}{2^n} - (n^2-2n+3) + \dfrac{3}{2^n} = n-3+\dfrac{n+3}{2^n}$, en exploitant les résultats des premières questions.

Exercice 14 (***)

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $\mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN\dots NB$, avec $k-1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n} + 1 - \dfrac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\dfrac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}-2(n+1)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{x-(n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}$
$= \frac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.
2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et donc $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$.
3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$ et $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{c+2}$. De même, on a $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0) = \frac{1}{c+2}$ et $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2}$. On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{1}{2}$. De même, $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}$.
4. On a $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}$, $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$, $\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \frac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1, 2, \dots, p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $\mathbb{P}_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$, $Z_p = 1$, …, $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \mathbb{P}(Z_p = k) \times \mathbb{P}_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2}\mathbb{P}(Z_p = k) = \frac{c}{pc+2}\sum_{k=0}^{k=p} k\mathbb{P}(Z_p = k) + \frac{1}{pc+2}\sum_{k=0}^{k=p}\mathbb{P}(Z_p = k) = \frac{c\mathbb{E}(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant égale à 1 car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \cdots = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $\mathbb{E}(Z_p) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{c\frac{n}{2} + 1}{nc + 2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 15 (**)

1. On reconnait ici un exemple classique de loi uniforme, plus précisément $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 2n\})$. Le cours nous affirme alors que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4n^2 - 1}{12}$.

2. (a) On a manifestement $\mathbb{P}(U \leqslant i) = \dfrac{i}{2n}$ (il y a i jetons possibles qui ont un numéro inférieur ou égal à i parmi les $2n$ que contient l'urne) et de même $\mathbb{P}(D \leqslant i) = \dfrac{i}{2n}$. Les deux événements étant indépendants (puisque les deux tirages le sont), on a donc $\mathbb{P}(Y \leqslant i) = \mathbb{P}((D \leqslant i) \cap (U \leqslant i)) = \dfrac{i^2}{4n^2}$.

   (b) L'événement $Y = i$ est réalisé exactement lorsque $Y \leqslant i$ est réalisé mais pas $Y \leqslant i-1$. Or, $(Y \leqslant i-1) \subset (Y \leqslant i)$, donc $\mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(Y \leqslant i) - \mathbb{P}(Y \leqslant i-1) = \dfrac{i^2 - (i-1)^2}{4n^2} = \dfrac{2i-1}{4n^2}$.

   (c) Calculons donc à l'aide de nos connaissances sur les sommes classiques $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \times \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{2n} 2i^2 - i = \frac{1}{4n^2}\left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(2n+1)}{2}\right)$
   $= \dfrac{n(2n+1)}{2n^2}\left(\dfrac{4n+1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n+1)(8n+2-3)}{12n} = \dfrac{(2n+1)(8n-1)}{12n} = \dfrac{16n^2+6n-1}{12n}$.

3. (a) Pour avoir $Z = i$, il faut nécessairement tirer un numéro inférieur ou égal à n (n'importe lequel) au premier tirage (histoire d'effectuer un deuxième tirage), ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Au deuxième tirage, il faut ensuite tirer le numéro i spécifiquement, ce qui se produit évidemment avec une probabilité $\dfrac{1}{2n}$. On a donc $\mathbb{P}(Z = i) = \dfrac{1}{4n}$.

   (b) Il y a maintenant deux possibilités d'obtenir le numéro i : soit on le tire au premier tirage, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{2n}$ (dans ce cas, il n'y aura pas de second tirage), soit on l'obtient au deuxième tirage, et la probabilité est alors la même qu'à la question précédente. Au total, on a donc $\mathbb{P}(Z = i) = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{3}{4n}$.

   (c) Vérifions : $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(Z = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3}{4n} = \frac{n}{4n} + \frac{3n}{4n} = 1$.

   (d) Calculons déjà $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3i}{4n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{3i}{4n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n} = \frac{3n(2n+1)}{4n} - \frac{n+1}{4} = \frac{5n+2}{4}$. Pour comparer cette espérance à celle de Y, on calcule tout bêtement $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Z) = \dfrac{16n^2+6n-1}{12n} - \dfrac{5n+2}{4} = \dfrac{16n^2+6n-1-15n^2-6n}{12n} = \dfrac{n^2-1}{12n}$. Cette valeur étant positive, on aura $\mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(Z)$, ce qui est intuitivement logique (dans un cas on garde systématiquement le meilleur des deux tirages mais dans l'autre non). De même, calculons $\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X) = \dfrac{5n+2}{4} - \dfrac{2n+1}{2} = \dfrac{n}{4}$. Là encore une valeur positive logique (on gagne quand même en tentant deux essais plutôt qu'un seul tirage complètement aléatoire).

Exercice 16 (***)

1. Si $b = 1$, on note simplement le numéro du tirage où on a tiré l'unique boule blanche de l'urne, qui suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Il y a cette fois-ci quatre boules dans l'urne, deux blanches et deux noires. La dernière boule blanche ne peut pas être tirée avant le deuxième tirage, donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$. On aura $X = 2$ si on tire les deux boules blanches lors des deux premiers tirages, ce qui se produit avec une probabilité $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. On aura par ailleurs $X = 4$ si on tire une boule blanche lors du dernier tirage, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2}$ puisqu'il y a autant de boules noires et de boules blanches dans l'urne au départ (le fait que ce soit le dernier tirage ne change rien, renverser le temps ne modifierait pas les probabilités à chaque tirage). On a donc $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{2}$ et on en déduit que $\mathbb{P}(X = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ (valeur qu'on peut bien sûr obtenir par un calcul direct). On calcule ensuite $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$, puis $\mathbb{E}(X^2) = 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{3}$ et enfin, en appliquant le théorème de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \frac{35}{3} - \frac{100}{9} = \frac{5}{9}$.
3. (a) Il faut au moins b tirages pour tirer toutes les boules blanches, donc $X(\Omega) = \{b, \dots, N\}$.

   (b) Il faut bien sûr que $k \geqslant b$ pour que l'énoncé ait un sens. Dans ce cas, tirer $b - 1$ boules blanches lors des $k - 1$ premiers tirages a une probabilité $\dfrac{\binom{b}{b-1} \times \binom{N-b}{k-b}}{\binom{N}{k-1}}$ (l'ordre de ces $k - 1$ tirages n'a aucune importance pour ce qu'on calcule ici). Pour que l'événement $X = k$ soit réalisé, il faut en plus qu'on tire lors du tirage k la dernière boule blanche, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{N - k + 1}$ (puisqu'il reste à ce moment $N - k + 1$ boules dans l'urne, dont une seule boule blanche). Conclusion : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{b \times \binom{N-b}{k-b}}{(N - k + 1)\binom{N}{k-1}} = \dfrac{b(N-b)!(k-1)!(N+1-k)!}{(N-k+1)(k-b)!(N-k)!N!} = \dfrac{n(N-b)!(k-1)!}{(k-b)!N!}$. Or, on peut calculer $\dfrac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{N}{b}} = \dfrac{(k-1)!b!(N-b)!}{(b-1)!(k-b)!N!} = \dfrac{n(N-b)!(k-1)!}{(k-b)!N!} = \mathbb{P}(X = k)$.

   (c) On calcule bêtement $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=b}^{k=N} k \times \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{N}{b}} = \frac{b}{\binom{N}{b}} \sum_{k=b}^{N} \binom{k}{b}$. On ne dispose pas a priori d'une formule permettant de calculer cette dernière somme mais on peut ruser. On sait en effet que la somme des probabilités des événements $X = k$ doit être égale à 1, ce qui revient à dire que $\displaystyle\sum_{k=b}^{N} \binom{k-1}{b-1} = \binom{N}{b}$. En modifiant la valeur de b pour la rendre égale à $b + 1$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=b+1}^{N} \binom{k-1}{b} = \binom{N}{b+1}$, ou si préfère (en décalant les indices) $\displaystyle\sum_{k=b}^{N-1} \binom{k}{b} = \binom{N}{b+1}$. Il manque un seul terme pour retrouver la somme apparaissant dans notre calcul d'espérance : $\displaystyle\sum_{k=b}^{N}\binom{k}{b}=\binom{N}{b+1}+\binom{N}{b}=\binom{N+1}{b+1}$ en appliquant la relation de Pascal. Finalement, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{b}{\binom{N}{b}}\times\dfrac{N+1}{b+1}=\dfrac{b(N+1)}{b+1}$ après simplification des factorielles.

Exercice 17 (***)

1. Posons $X=e^{\lambda(S-np)}$ et $a=e^{n\lambda x}$. La variable X est évidemment positive, et $a>0$, donc on peut appliquer l'inégalité de Markov pour obtenir $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$. Le membre de droite est exactement celui de l'inégalité souhaitée. Or, $\mathbb{P}(S-np\geqslant nx)=\mathbb{P}(\lambda(S-np)\geqslant n\lambda x)=\mathbb{P}(X\geqslant e^{n\lambda x})$ puisque l'exponentielle est une bijection croissante. On a donc prouvé l'inégalité souhaitée.
2. La variable S suit par hypothèse une loi binomiale de paramètre (n,p). On peut donc la décomposer sous la forme $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}S_i$, où S_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p, avec des variables S_i indépendantes. On a alors $\lambda(S-np)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda(S_i-p)$, donc $e^{\lambda(S-np)}=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda(S_i-p)}$. Les variables S_i étant supposées indépendantes, les variables $e^{\lambda(S_i-p)}$ le sont aussi (lemme des coalitions), donc $\mathbb{E}(e^{\lambda(S-np)})=(\mathbb{E}(e^{\lambda(S_i-p)}))^n$. Par théorème du transfert, $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_i-p)})=\mathbb{P}(S_i=1)e^{\lambda(1-p)}+\mathbb{P}(S_i=0)e^{-\lambda p}=pe^{\lambda(1-p)}+(1-p)e^{-\lambda p}$, donc $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_np)})=(pe^{\lambda(1-p)}+(1-p)e^{-\lambda p})^n$.
3. Posons donc $f(t)=\dfrac{e^{t^2}+t}{e^t}=e^{t^2-t}+te^{-t}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(t)=(2t-1)e^{t^2-t}+e^{-t}-te^{-t}$, qui après factorisation par e^{-t} est du signe de $g(t)=(2t-1)e^{t^2}+1-t$. Dérivons à nouveau : $g'(t)=2e^{t^2}+2t(2t-1)e^{t^2}-1=(4t^2-2t+2)e^{t^2}-1$. Le facteur $4t^2-2t+2$ est lui-même minimal lorsque sa dérivée $8t-2$ s'annule, donc pour $t=\dfrac{1}{4}$. La valeur correspondante est $\dfrac{4}{16}-\dfrac{2}{4}+2=\dfrac{7}{4}$. On en déduit que, $\forall t\in\mathbb{R}$, $g'(t)\geqslant\dfrac{7}{4}e^{t^2}-1>0$. La fonction g est donc strictement croissante. Or, $g(0)=0$, donc g est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$. Comme f' a le même signe que g, la fonction f admet donc pour minimum $f(0)=1$, ce qui prouve que, $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{t^2}+t\leqslant e^t$.

   On peut alors appliquer l'inégalité précédente à $t=\lambda(1-p)$ et à $t=-\lambda p$ pour obtenir $\mathbb{E}(e^{\lambda(S-np)})\leqslant(p(e^{\lambda^2(1-p)^2}+\lambda(1-p))+(1-p)(e^{\lambda^2p^2}-\lambda p))^n\leqslant((p+1-p)e^{\lambda^2})^n=e^{n\lambda^2}$. On en déduit via l'inégalité de la première question que $\mathbb{P}(S-np\geqslant nx)\leqslant e^{n(\lambda^2-\lambda x)}$. Comme cette inégalité est valable pour tout réel λ, on a intérêt à prendre une valeur de λ minimisant notre majorant, c'est-à-dire $\lambda=\dfrac{x}{2}$ (puisque $\lambda\mapsto\lambda^2-\lambda x$ a pour dérivée $\lambda\mapsto 2\lambda-x$ qui s'annule en cette valeur). On trouve alors $n(\lambda^2-\lambda x)=-\dfrac{nx^2}{4}$, d'où l'inégalité demandée.
4. Il suffit de reprendre tout le raisonnement en changeant quelques signes : inégalité de Markov à la question 1 pour majorer $\mathbb{P}(S-np\leqslant -nx)$ par la même espérance, et le reste du calcul est identique. On en déduit donc $\mathbb{P}(|S-np|\geqslant nx)\leqslant 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$ en additionnant simplement les deux majorations. La probabilité de gauche est la même que celle attendue en divisant simplement partout par n.

5. La loi de S étant binomiale, on sait que $\mathbb{E}\left(\frac{S}{n}\right) = p$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$ (division par n^2 de la variance de la binomiale), donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{nx^2}$. Pour de grandes valeurs de n, la décroissance de l'exponentielle étant nettement plus forte que celle de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, on devrait obtenir de meilleures valeurs avec Berstein. Par exemple, pour $p = \frac{1}{2}$, $n = 20$ et $x = 1$, on a une majoration via Bienaymé-Tchebychev égale à $\frac{1}{80} = 0.0125$, celle donnée par l'inégalité de Bernstein est égale à $2e^{-5} \simeq 0.0135$, les valeurs sont similaires. Mais pour $n = 100$ (et toujours $x = 1$ pour ne pas s'embêter), Bienaymé-Tchebychev donne $\frac{1}{400} = 0.0025$, et Bernstein $2e^{-25} \simeq 2.8 \times 10^{-11}$, l'ordre de grandeur n'a plus rien à voir.

Exercice 18 (***)

1. Dans le cas d'une variable constante, la seule valeur non nulle de $\mathbb{P}(X = k)$ vaut 1, donc $H(X) = f(1) = 0$.
2. On suppose qu'il s'agit d'une loi uniforme sur un ensemble de cardinal n (peut importe l'ensemble ici, la seule donnée importante pour le calcul de l'entropie est celle des probabilités, pas celle des valeurs prises par X), donc X prend n valeurs différentes avec la même probabilité $\frac{1}{n}$, et $H(X) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n)$. Remarquons en passant qu'on retrouve le résultat de la première question si $n = 1$.
3. Commençons par prouver l'inégalité $f(x) \leqslant 1 - x$. Posons donc $g(x) = f(x) + x - 1 = x - 1 - x\ln(x)$, la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 - \ln(x) - 1 = -\ln(x)$. La fonction g est donc croissante sur $]0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$ et admet donc en 1 un maximum de valeur $g(1) = 0$, ce qui prouve qu'elle est bien négative sur $]0, +\infty[$ (en en 0 si on la prolonge par continuité). Majorons maintenant $\sum_{k \in X(\Omega)} f(N\mathbb{P}(X = k)) \leqslant \sum_{k \in X(\Omega)} 1 - N\mathbb{P}(X = k) = N - N \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = N - N = 0$ (la somme des probabilités étant bien sûr égale à 1).
4. Par définition, $f(N\mathbb{P}(X = k)) = -N\mathbb{P}(X = k)\ln(N\mathbb{P}(X = k)) = -N\ln(N)\mathbb{P}(X = k) + Nf(\mathbb{P}(X = k)$. Si on somme ces égalités sur toutes les valeurs de k parcourant $X(\Omega)$, on a donc $\sum_{k \in X(\Omega)} f(N\mathbb{P}(X = k)) = -N\ln(N) \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) + NH(X) = -N\ln(N) + NH(X)$. Puisqu'on vient de prouver que cette quantité était toujours négative, on en déduit directement que $-\ln(N) + H(X) \leqslant 0$, donc $H(X) \leqslant \ln(N)$.
5. L'entropie est toujours positive puisqu'on ajoute des images par la fonction f de valeurs comprises entre 0 et 1 (ce sont des probabilités !) pour lesquelles $x\ln(x) \leqslant 0$. Or, on a vu que l'entropie d'une variable constante était nulle, donc l'entropie minimale vaut 0. Pour que l'entropie d'une variable X soit nulle, il faut qu'il n'y ait aucun terme strictement positif dans le calcul de la somme définissant $H(X)$. Or, $f(x) > 0$ pour toute valeur de x strictement comprise entre 0 et 1. On doit donc avoir $\mathbb{P}(X = k) \in \{0, 1\}$ pour toutes les valeurs de k, ce qui revient exactement à dire que la variable X est constante. Seules les variables constantes ont donc une entropie nulle.
6. Le maximum de l'entropie (à nombre de valeurs de k fixé) est égal à $\ln(N)$, atteint pour une variable uniforme. Peut-on avoir $H(X) = \ln(N)$ pour une variable ne suivant **pas** une loi uniforme ? Pour avoir $H(X) = \ln(N)$, on doit avoir égalité dans l'inégalité de la question 3,

ce qui impose que tous les termes $f(N\mathbb{P}(X=k))$ soient nuls. Comme la fonction f ne s'annule qu'en 1, on doit donc avoir $N\mathbb{P}(X=k)=1$ pour toutes les valeurs de k appartenant à $X(\Omega)$, ce qui revient exactement à dire que la variable X suit une loi uniforme.

Exercice 19 (*)

On a donc $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(Y=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(Y=0)=1-p$. On en déduit la loi suivante pour (U,V) (pas vraiment d'autre méthode que de procéder au cas pas cas, sachant qu'il n'y a que quatre possibilités) :

$U\backslash V$	-1	0	1	$\mathbb{P}(U=i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$\mathbb{P}(V=j)$	$p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	$p(1-p)$	

Les deux variables ne sont manifestement pas indépendantes : on a par exemple $\mathbb{P}((U=0)\cap(V=1))=0$, alors que $\mathbb{P}(U=0)\times\mathbb{P}(V=1)\neq 0$. Calculons les espérances demandées : $\mathbb{E}(U)=2p(1-p)+2p^2=2p$, et $\mathbb{E}(V)=-p(1-p)+p(1-p)=0$. Le produit des deux espérances est donc nul. Or, la variable UV ne peut prendre que trois valeurs (on reprend les cas du tableau de la loi de couple) : -1 avec probabilite $p(1-p)$, 1 avec la même probabilité $p(1-p)$ et 0 le reste du temps (probabilité $p^2+(1-p)^2$). On en déduit que $\mathbb{E}(UV)=p(1-p)-p(1-p)=0$. Non seulement on peut avoir $\mathbb{E}(UV)=\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$ mais ce sera même toujours le cas. La dernier calcul est immédiat via la formule de König-Huygens : $\mathrm{Cov}(U,V)=\mathbb{E}(UV)-\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)=0$.

Exercice 20 (**)

Le mieux si on ne veut pas se perdre dans le remplissage du tableau est encore d'écrire tous les rangements possibles, au nombre de 27, et de compter. Sinon, on s'en sort sans : si $N=0$, on a nécessairement $X=1$ puisqu'on a alors une chaussette dans chaque tiroir, et cela se produit avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (six rangements possibles, on peut permuter les chaussettes). Si $N=1$, soit $X=0$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (trois cas avec une chaussette dans le deuxième tiroir et deux dans le troisième, trois autres cas où c'est le contraire), soit $X=1$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (deux choix pour le tiroir où caser les deux chaussettes restantes, et trois choix de chaussette à mettre dans le premier tiroir), soit enfin $X=2$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (essentiellement le même raisonnement que le cas précédent). Enfin, si $N=2$, on a trois cas (il faut choisir le tiroir qui accueille les trois chaussettes), un pour lequel $X=3$ et deux pour lesquels $X=0$.

$X\backslash N$	0	1	2	$\mathbb{P}(X=i)$
0	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$\mathbb{P}(N=j)$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$	

Encore une fois, les deux variables ne sont pas du tout indépendantes.

Exercice 21 (**)

On a $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=\dfrac{1}{in}$ si $j\leqslant i$, et 0 sinon (le numéro de la boule est toujours inférieur à celui de l'urne). En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Y=j)$, on a donc $\mathbb{P}(X=i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{in}=i\times\frac{1}{in}=\frac{1}{n}$. C'est sans surprise une loi uniforme, d'espérance $\dfrac{n+1}{2}$. Quand à Y, on a $\mathbb{P}(Y=j)=\displaystyle\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{in}$ (ce qui ne se simplifie pas) et $\mathbb{E}(Y)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{in}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{in}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{in}\frac{i(i+1)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2n}=\frac{n(n+1)}{4n}+\frac{1}{2}=\frac{n+3}{4}$.

Exercice 22 (***)

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=1$, c'est-à-dire $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}aij=a\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{n}j=a\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc $a=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Via la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X=i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=ai\sum_{j=1}^{n}j=ai\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2i}{n(n+1)}$. Et donc $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)}=\frac{2n+1}{3}$.
3. La loi de Y est la même que celle de X puisqu'obtenue par le même calcul.
4. On vérifie que $\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j)=\dfrac{2i}{n(n+1)}\times\dfrac{2j}{n(n+1)}=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}ij=aij=\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$. Les deux variables sont donc indépendantes.
5. On a $\mathbb{P}(X=Y)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=i))=\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2}=\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$.
6. Dans le cas d'un max, il est plus facile de commencer par calculer les probabilités $\mathbb{P}(U\leqslant i)$. En effet, dire que $\max(X,Y)\leqslant i$ est équivalent à dire que X et Y prennent toutes les deux des valeurs inférieures à i. Les variables étant indépendantes, $\mathbb{P}(U\leqslant i)=\mathbb{P}(X\leqslant i)\mathbb{P}(Y\leqslant i)$. Reste à calculer $\mathbb{P}(X\leqslant i)\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{i}\frac{2j}{n(n+1)}=\frac{i(i+1)}{n(n+1)}$. On peut finir notre calcul : $\mathbb{P}(U\leqslant i)=\dfrac{i^2(i+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. On en déduit que $\mathbb{P}(U=k)=\mathbb{P}(U\leqslant k)-\mathbb{P}(U\leqslant k-1)=\dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2}-\dfrac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{k^2((k+1)^2-(k-1)^2)}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{k^2\times 4k}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 23 (**)

1. La variable Z a pour univers-image $Z(\Omega)=\{1,2,\dots,n\}$. Pour avoir $Z=k$, il faut que l'une des situations suivantes se produise : X et Y prennent toutes les deux la valeur k, ou l'une des deux prend la valeur k et l'autre prend une valeur comprise entre 1 et $k-1$ (on peut séparer autrement, mais il est important de ne pas compter deux fois le cas où les

deux variables prennent la même valeur). On additionne les probabilités correspondantes : $\mathbb{P}(Z=k)=\dfrac{1}{n^2}+2\times\dfrac{1}{n}\times\dfrac{k-1}{n}=\dfrac{2k-1}{n^2}$.

2. Calculons donc $\mathbb{E}(Z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k(2k-1)}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2k^2-k=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{(n+1)(2(2n+1)-3)}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$. Pas besoin de refaire un calcul de somme pour obtenir l'espérance de T. En effet, quelles que soient les valeurs prises par X et Y, on aura toujours $Z+T=X+Y$, donc $T=X+Y-Z$. La linéarité de l'espérance et la formule du cours pour l'espérance des lois uniformes donne alors $\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Z)=n+1-\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.
3. Non, elles n'ont aucune raison de l'être. L'énoncé semble suggérer d'utiliser les espérances pour le prouver. Constatons alors que $ZT=XY$ (même principe que pour la somme à la question précédente), donc $\mathbb{E}(ZT)=\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\dfrac{(n+1)^2}{4}$ (puisque les variables X et Y sont indépendantes). Or, $\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T)=\dfrac{(n+1)^2(4n-1)(2n+1)}{36n^2}$ ne donne pas vraiment la même valeur (il faudrait avoir $(4n-1)(2n+1)=9n^2$, donc $n^2-2n+1=0$, ce qui ne se produit que lorsque $n=1$. C'est évidemment normal : pour $n=1$, toutes les variables considérées sont constantes égales à 1, et donc indépendantes). Les variables Z et T ne peuvent donc pas être indépendantes si $n>1$.
4. Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}((Z=i)\cap(X=j))$ pour tout couple d'entiers (i,j) appartenant à $\{1,2,\dots,n\}$. Il suffit pour cela de distinguer trois cas :

   — si $i<j$, la situation est impossible (le max ne peut pas être strictement inférieur aux valeurs prises par X et Y), donc $\mathbb{P}((Z=i)\cap(X=j))=0$.

   — si $i=j$, la variable X doit bien sûr prendre la valeur i, et la variable Y doit prendre une valeur quelconque inférieure ou égale à i, ce qui donne $\mathbb{P}((Z=i)\cap(X=j))=\dfrac{i}{n^2}$.

   — si $i>j$, X doit prendre la valeur j, et Y doit prendre la valeur i, ce qui ne laisse qu'un seul cas possible : $\mathbb{P}((Z=i)\cap(X=j))=\dfrac{1}{n^2}$.
5. On retrouve la loi marginale à l'aide d'un calcul de somme (formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements constitué des évènements $(X=j)$) : $\mathbb{P}(Z=i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}((Z=i)\cap(X=j))=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}=\frac{2i-1}{n^2}$. On retrouve bien sûr la même formule qu'à la question 1.

Exercice 24 (*)

Exercice 25 (**)

1. L'évènement $X_2=1$ signifie qu'on tire au deuxième tirage une boule différente de celle tirée au premier, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{n+1}$. On en déduit que $X_2\sim\mathcal{B}\left(1,\dfrac{n}{n+1}\right)$.
2. De même, $X_i=1$ si chacun des $i-1$ premiers tirages a donné une boule différente de X_i, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{n}{n+1}$ pour chacun, donc $X_i\sim\mathcal{B}\left(1,\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}\right)$.
3. On a $X_i=1$ et $X_j=1$, si les tirages i et j donnent des résultats différents (probabilité $\dfrac{n}{n+1}$), si chacun des $i-1$ premiers tirages est différent du i-ème et du j-ème (proba $\dfrac{n-1}{n+1}$, $i-1$

fois) et si chacun des tirages entre le i-ème et le j-ème est différent du j-ème (proba $\dfrac{n}{n+1}$, $j-i-1$ fois), soit une probabilité globale de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{j-i}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{i-1} = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.

4. Si X_i et X_j sont deux lois de Bernoulli, X_iX_j est aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la valeur calculée à la question précédente (puisqu'avoir $X_iX_j = 1$ équivaut à $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$).
5. La formule donnant $\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$ n'est manifestement pas égale au produit de $\mathbb{P}(X_i = 1)$ par $\mathbb{P}(X_j = 1)$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
6. On a tout simplement $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.
7. On en déduit que $\mathbb{E}(Z_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}{1-\frac{n}{n+1}} = (n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right)$.
   Lorsque p tend vers l'infini, comme $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p$ est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 tendant donc vers 0, cette espérance a pour limite $n+1$. C'est tout à fait logique, quand le nombre de boules tirées tend vers l'infini, on s'attend à tirer toutes les boules de l'urne, soit $n+1$ boules différentes.

Exercice 26 (***)

1. La fonction g_X est tout simplement une fonction polynômiale (dans le cas où X est une variable aléatoire finie à valeurs entières du moins) dont les coefficients sont par définition les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$. La donnée de g_X renseigne donc à la fois sur les valeurs prises par X (les degrés pour lesquels le coefficient du polynôme n'est pas nul) et sur les probabilités correspondantes, et donne donc accès à toutes les informations nécessaires pour définir la loi de la variable X.
2. Dans le cas d'une loi de Bernoulli de paramètre p, on aura simplement $g_X = 1-p+pt = 1+p(t-1)$. Dans le cas d'une loi binomiale de paramètre (n,p), c'est à peine plus compliqué : $g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k} = (pt+1-p)^n = (1+p(t-1))^n$.
3. C'est un simple calcule formel : en notant n la plus grande valeur prise par la variable $X+Y$, $g_{X+Y}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{P}((X+Y)=k)t^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i))t^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X = i)t^i\mathbb{P}(Y=k-i)t^{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)t^i \times \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(Y=j)t^j$ (les termes du produit de sommes écrit à la dernière étape sont bien exactement les mêmes que ceux de la somme double précédente). On obtient bien $g_{X+Y}(t) = g_X(t) \times g_Y(t)$.
4. Il suffit d'appliquer les résultats des deux questions précédentes : $g_X(t) = (1+p(t-1))^{n_1}$ et $g_Y(t) = (1+t(p-1))^{n_2}$, donc $g_{X+Y}(t) = (1+p(t-1))^{n_1+n_2}$, ce qui correspond exactement à la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre (n_1+n_2,p). La question 1 permet alors d'affirmer que $X+Y$ suit nécessairement cette loi.

Exercice 27 (***)

Commençons donc par le cas particulier où $n=3$, ce qui permet encore de présenter sous forme de tableau. Les trois tableaux correspondent respectivement à $Z=1$, $Z=2$ et $Z=3$. Il y a 27 tirages possibles au total, se répartissant comme suit :

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{27}$

Pour obtenir les trois lois marginales, il faut dans le cas de Z faire la somme tableau par tableau, et dans le cas de X et de Y faire les sommes par lignes et par colonnes, en ajoutant les résultats des trois tableaux. On obtient :

	1	2	3
X	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$
Y	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$
Z	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

Dans le cas général, c'est un peu plus formel mais pas beaucoup plus compliqué. Soient (i,j,k) trois entiers inférieurs à n. Si $i > j > k$, on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{6}{n^3}$ (il y a n^3 tirages au total, et 6 favorables, le nombre de permutations possibles des trois résultats). Si $i = j > k$ ou $i > j = k$, on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{3}{n^3}$, si $i = j = k$, on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3}$, et le reste du temps $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = 0$ (tous ces cas sont déjà présents dans le cas $n = 3$). On en déduit par la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-k)\frac{3}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + 3\frac{n-k}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{3}{n^3} + 6\frac{n-j}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 6(n-k) + 3(n-k-1)(n-k))$. La loi de X est symétrique de celle de Z : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Z = n+1-k) = \frac{1}{n^3}(1 + 6(k-1) + 3(k-2)(k-1))$. Enfin, $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-1)\frac{3}{n^3} + \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{6}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 3(n-1) + 6(j-1)(n-j))$. Vous pouvez vérifier que les formules marchent pour $n = 3$, voire pour $n = 4$ si vous êtes motivés.

Problème (***)

1. (a) Commençons par constater que $S_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $T_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ en appliquant la convention de l'énoncé pour le cas où il n'y a pas de Pile. Il n'y a que huit tirages possibles dans l'univers, faire la liste n'est donc pas bien compliqué. Un cas (PPP) correspond à

$S_3 = 3$ et $T_3 = 1$, un autre (FPP) pour $S_3 = 2$ et $T_3 = 2$, deux (PPF et PFP) pour $S_3 = 2$ et $T_3 = 1$. Trois tirages correspondent à $S_3 = 1$, un pour chaque valeur de T_3 comprise entre 1 et 3, et le dernier cas, celui où on tire trois Face, donne $S_3 = T_3 = 0$. Soit le tableau suivant :

$T_3 \backslash S_3$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0	0

(b) On peut obtenir la loi marginale de T_3 en faisant les sommes des lignes du tableau précédent pour obtenir :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Son espérance vaut $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{11}{8}$.

(c) La variable S_3 est un cas classique de loi binomiale, de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, $\mathbb{E}(S_3) = \dfrac{3}{2}$.

(d) Les variables ne sont évidemment pas indépendantes, puisque par exemple $\mathbb{P}((S_3 = 1) \cap (T_3 = 0)) \neq \mathbb{P}(S_3 = 1) \times \mathbb{P}(T_3 = 0)$.

(e) i. Calculer cette probabilité revient à additionner les probabilités sur la diagonale du premier tableau, ou si on préfère être savant, à calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}((S_3 = k) \cap (T_3 = k))$. On obtient $\mathbb{P}(T_3 = S_3) = \dfrac{3}{8}$.

ii. Puisque $\mathbb{P}(T_3 \neq 0) = \dfrac{7}{8}$, une simple application de la définition donne $\mathbb{P}_{T_3 \neq 0}(T_3 = S_3) = \dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{7}{8}} = \dfrac{2}{7}$.

iii. Toujours d'après la définition, $\mathbb{P}_{S_3=2}(T_3 = 1) = \dfrac{\mathbb{P}((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1))}{\mathbb{P}(S_3 = 2)} = \dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

(f) Le plus simple est de reprendre le tableau de la loi de couple et de faire la liste des cas possibles : la variable S_3T_3 prend la valeur 0 avec probabilité $\dfrac{1}{8}$, la valeur 1 quand $S_3 = T_3 = 1$, avec probabilité $\dfrac{1}{8}$, la valeur 2 quand $S_3 = 1$ et $T_3 = 2$ ou $S_3 = 2$ et $T_3 = 1$, avec une probabilité $\dfrac{2}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$, la valeur 3 avec probabilité $\dfrac{2}{8}$ (deux cas possibles) et enfin la valeur 4 avec probabilité $\dfrac{1}{8}$ (quand $S_2 = T_2 = 4$). Autrement dit, $S_3T_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et la loi est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S_3T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

On calcule ensuite facilement $\mathbb{E}(S_3T_3) = \frac{1}{8}+\frac{6}{8}+\frac{6}{8}+\frac{4}{8} = \frac{17}{8}$, puis $\frac{\mathbb{E}(S_3T_3)}{\mathbb{E}(S_3)\mathbb{E}(T_3)} = \frac{\frac{17}{8}}{\frac{11}{8}\times\frac{3}{2}} = \frac{34}{33}$, ce qui est une valeur très proche de 1.

2. (a) La probabilité $\mathbb{P}_{S_n=1}(T_n = 0)$ est évidemment nulle, puisqu'on a forcément obtenu un Pile si $S_n = 1$. Pour les autres valeurs de k, on constate que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \frac{n}{2^n}$ (il y a 2^n tirages possibles au total, dont exactement n avec un seul Pile puisqu'il suffit de choisir le rang du Pile). De même, $\mathbb{P}((S_n = 1) \cap (T_n = k)) = \frac{1}{2^n}$ (si $k \neq 0$), puisqu'un seul tirage correspond à cet événement. Autrement dit, $\mathbb{P}_{S_n=1}(T_n = k) = \frac{1}{n}$ pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et n. Cela revient à dire que la loi de T_n sachant $S_n = 1$ est une loi uniforme, ce qui n'a effectivement rien de surprenant : si on sait à l'avance qu'on va obtenir un seul Pile, il a autant de chances d'être obtenu à chacun des tirages effectués.

(b) Sans difficulté, $T_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. On a facilement $\mathbb{P}(T_n = 0) = \frac{1}{2^n}$ (il faut obtenir Face à tous les tirages), $\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{2}$ (Pile au premier tirage, indépendamment de ce qui se passe ensuite), $\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{1}{4}$ (on commence par un Face, puis un Pile au deuxième tirage), et plus généralement $\mathbb{P}(T_n = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \neq 0$ (l'événement $T_n = k$ correspond à obtenir $k-1$ Face puis un Pile lors des k premiers tirages).

(c) L'espérance de T_n (en oubliant la valeur 0 qui n'intervient pas dans le calcul) est donc donnée par $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, ce qui correspond à un facteur $\frac{1}{2}$ près à la somme partielle d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$. Pour ne pas s'embêter avec un calcul pénible, rappelons qu'on a vu en cours que cette somme partielle valait $\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-x)^2}$ (formule rappelée dans l'énoncé de toute façon). Ici, on en déduit que $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} + 2 = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. On vérifie que la formule est correcte pour $n = 3$, puis on constate que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = 2$ (limites classiques ici, le numérateur est négligeable devant le dénominateur dans la fraction).

(d) Comme précédemment, la variable S_n suit une loi binômiale, désormais de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. En particulier, $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2}$. L'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ est très facile : T_n ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1 (ce qui implique évidemment $S_nT_n \geqslant S_n$), sauf lorsque $T_n = S_n = 0$, auquel cas l'inégalité reste vraie. On en déduit que $\mathbb{E}(S_nT_n) \geqslant \mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2}$.

(e) Quand $T_n = 0$, S_n prend automatiquement la valeur 0 également. Si $k \neq 0$, le fait que $T_n = k$ implique que la suite de lancers a commencé par $k-1$ Face, et ne peut donc contenir plus de $n-(k-1) = n+1-k$ Pile. Elle en contient par ailleurs au moins un, donc S_n prend toutes les valeurs entre 1 et $n+1-k$.

(f) Notons f la fonction, c'est une fonction du second degré, de dérivée $f'(x) = n+1-2x$. Cette dérivée s'annule en $x = \frac{n+1}{2}$, et f admet en ce point un maximum de valeur $f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. D'après la question précédente, lorsque $T_n = k$, on a $S_n \leqslant n+1-k$. Autrement dit, $S_n \leqslant n+1-T_n$ (cela reste vrai pour la valeur 0), donc $S_nT_n \leqslant T_n(n+1-T_n)$. La variable T_n prenant des valeurs inférieures ou égales à $n+1$, on déduit de l'étude de fonction qu'on a toujours $S_nT_n \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, ce qui implique que son espérance est également inférieure à cette valeur. Si on veut être très précis, la valeur maximale prise par S_nT_n est $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ lorsque n est impair, mais si n est pair, le nombre $\frac{n+1}{2}$ n'est plus entier, et la valeur maximale devient égale à $f\left(\frac{n}{2}\right) = f\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n(n+1)}{4}$.

3. (a) En utilisant la formule donnée, $\frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k} \leqslant \mathbb{E}(S_nT_n) \leqslant \frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ (la somme qu'on retranche étant évidemment positive). À droite, on sait que la somme converge en croissant vers 2 (calculs de série géométrique dérivée faits dans la partie précédente), donc le membre de droite est bien majoré par 2. À gauche, il faudrait réussir à majorer $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\times\frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{1}{4}\times\frac{k}{2^{k-1}}$, le premier morceau est au facteur $\frac{1}{8}$ près la somme gentiment fournie par l'énoncé. Ici, avec $q = \frac{1}{2}$, notre somme converge en croissant vers $\frac{1}{8}\times\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{4}\times 4 = 2+1 = 3$. La minoration demandée par l'énoncé en découle.

   (b) C'est évident puisque la parenthèse tend vers 1, et la somme vers 2 (toujours notre série géométrique dérivée).

   (c) On divise par n l'encadrement précédent : $\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \frac{3}{n} \leqslant \frac{\mathbb{E}(S_nT_n)}{n} \leqslant 1+\frac{2}{n}$, et on applique simplement le théorème des gendarmes (en appliquant le résultat de la question précédente pour le membre de gauche), et on obtient que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(S_nT_n)}{n} = 1$.

   (d) Puisque $\mathbb{E}(S_nT_n) \sim n$ (question précédente), $\frac{\mathbb{E}(S_nT_n)}{\mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(T_n)} \sim \frac{n}{\frac{n}{2}\times 2} \sim 1$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(S_nT_n)}{\mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(T_n)} = 1$. On se rapproche en fait d'une situation où les deux variables sont indépendantes.