Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 8 : Structures algébriques

MPSI Lycée Camille Jullian

2 décembre 2021

Exercice 1 (**)

Montrer que la loi $\star$ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $(x,y) \star (x',y') = (xx', xy' + yx'^n)$ est une loi de groupe quel que soit l'entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2 (*)

On définit une loi $\star$ sur $\mathbb{R}$ par $x \star y = x + y + x^2y^2$.

1. La loi $\star$ est-elle associative ? Commutative ?
2. Existe-t-il un élément neutre pour cette loi ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $1 \star x = 0$ et $1 \star x = 1$.

Exercice 3 (*)

On munit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de la loi $\star$ définie de la façon suivante : $x \star y$ est le reste de la division euclidienne de x^y par 5.

1. Vérifier que $\star$ est une lci, puis écrire le tableau de la loi $\star$.
2. S'agit-il d'une loi de groupe ?
3. Résoudre dans E les équations $(3 \star x) \star 2 = 1$, puis $4 \star (2 \star x) = 2$, et enfin $(3 \star x) \star 3 = 3$.

Exercice 4(*)

On considère l'ensemble G formé des six applications $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes : $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = \dfrac{x}{x-1}$ et $f_6(x) = 1 - x$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe. Est-ce un groupe abélien ?
2. Quels sont les sous-groupes de G contenant exactement deux éléments ?
3. Les sous-ensembles $H_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $H_2 = \{f_1, f_2, f_4, f_6\}$ sont-ils des sous-groupes de G ?

Exercice 5 (*)

Soit E un ensemble quelconque, montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif (on rappelle que l'opération Δ est la différence symétrique définie par $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Quelles sont les unités de cet anneau ?

Exercice 6 (*)

Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

Exercice 7 (**)

Soit G un groupe et $a \in G$, on note τ_a l'application $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$ (en notant la loi de groupe multiplicativement, ce qu'on fera dans tout l'exercice).

1. Montrer que τ_a est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur).
2. Si a et b sont deux éléments de G, que vaut $\tau_a \circ \tau_b$? Que vaut τ_e ?
3. Montrer que l'application $a \mapsto \tau_a$ est un morpisme de groupes de G vers $Aut(G)$. Quel est son noyau ?

Exercice 8 (***)

Un élément x d'un groupe G dont la loi est notée multiplicativement est dit d'ordre fini s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = e$. On appelle alors ordre de l'élément x le plus petit entier n vérifiant $x^n = e$.

1. Quels sont les éléments d'ordre fini dans $(\mathbb{R}, +)$? Et dans $(\mathbb{C}^*, \times)$?
2. Montrer que, si x est un élement d'ordre n de G, $H = \{x^k \mid 0 \leqslant k < n\}$ est un sous-groupe de G.
3. Montrer que, si x est d'ordre fini, x^{-1} l'est aussi, et que ces deux éléments ont le même ordre.
4. Montrer que, si x est d'ordre fini, yxy^{-1} est de même ordre que x, quel que soit y appartenant à G.
5. Montrer que, si xy est d'ordre fini, alors yx est d'ordre fini, et a le même ordre que xy.

Exercice 9 (**)

Soit G un groupe.

1. Montrer qu'une intersection de sous-groupes de G est toujours un sous-groupes de G.
2. Soit $x \in G$, on appelle centralisateur de x dans G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de G.
3. On appelle centre de G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de G.

Exercice 10 (***)

Soit $(G, \star)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. On définit sur G une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists z \in H,\ y = x \star z$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément x ?
2. Montrer que les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ ont toutes le même nombre d'éléments.
3. En déduire que le nombre d'éléments de H est forcément un diviseur de celui de G.
4. Quels sont les sous-groupes d'un groupe fini contenant un nombre premier d'éléments ?

Exercice 11 (**)

On note $A = \left\{ \dfrac{p}{2^n} \mid (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer les unités de A.
3. Mêmes questions avec l'ensemble des nombres décimaux.

Exercice 12 (***)

Soit A un anneau, un élément $x \in A$ est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que, si A est intègre, 0 est le seul élément nilpotent.
2. Montrer que, si x et y sont nilpotents et commutent, $x + y$ et xy sont encore nilpotents.
3. Montrer que, si x est nilpotent, $1 - x$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 13 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau dans lequel $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que, $\forall x \in A$, $2x = 0$.
2. Montrer que A est nécessairement un anneau commutatif.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in A^2$, $xy(x + y) = 0$.
4. En déduire que, si A contient au moins trois éléments, il ne peut pas être un anneau intègre.

Exercice 14 (***)

On note pour tout l'exercice α l'une des deux solutions de l'équation $z^2 + z + 2$. Le choix de la solution et la valeur exacte de α n'ont aucune importance pour la suite de l'exercice. On note $\mathbb{Z}[\alpha] = \{p + \alpha q \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Quelles sont les valeurs de $\alpha + \overline{\alpha}$ et de $\alpha\overline{\alpha}$?
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est stable par conjugaison complexe.
4. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $z\overline{z} \in \mathbb{N}$.
5. Soit $z = p + \alpha q \in \mathbb{Z}[\alpha]$, montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ si et seulement si $p^2 + 2q^2 - pq = 1$.
6. Montrer que z ne peut pas être inversible si $pq < 0$.
7. Montrer que z ne peut pas non plus être inversible si $pq > 0$.
8. En déduire l'ensembles des unités de $\mathbb{Z}[\alpha]$.