

# Feuille d'exercices n° 13 : Polynômes

MPSI B Lycée Camille Jullian

18 janvier 2022

## Exercice 1 (\*)

Soient  $P$  et  $Q$  les deux polynômes définis par  $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$  et  $Q(X) = -X^2 + 3X$ . Calculer chacun des polynômes suivants :  $P + Q$ ,  $PQ$ ,  $P^2$ ,  $P \circ X^2$ ,  $P \circ Q$ ,  $Q \circ P$ ,  $P'Q$ ,  $Q^{(2)} \circ P'$ ,  $3PQ - Q^2 \circ P$ .

## Exercice 2 (\*)

Soit  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ .

1. Déterminer une racine évidente du polynôme  $P$ .
2. Factoriser  $P$  sous la forme  $(X + 2)Q(X)$ , où  $Q$  est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Résoudre les inéquations  $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$  et  $e^{2x} - 2e^x \leq 5 - 6e^{-x}$

## Exercice 3 (\* à \*\*\*)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  :

1.  $P_1 = X^6 + 1$
2.  $P_2 = X^6 - 7X^3 - 8$
3.  $P_3 = (X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2$
4.  $P_4 = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$  (on trouvera un entier  $n \leq 5$  racine double de  $P$ )
5.  $P_5 = X^6 - X^5 + X^4 + X^3 - 14X^2 + 20X - 8$  (aucune astuce ici, il faut simplement y croire)
6.  $P_6 = X^8 + X^4 + 1$
7.  $P_7 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
8.  $P_8 = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

## Exercice 4 (\*\*)

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes  $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$ .
2. Effectuer la division euclidienne de  $X^6 - i$  par  $X^2 + i$ . En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de  $X^6 - i$ .
3. Résoudre l'équation  $z^6 = i$  en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

## Exercice 5 (\*\*)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- $P$  est de degré 3,  $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$  et  $P'(0) = 2$
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- $P$  est de degré 3,  $(X + 1)^2$  divise  $P + 1$  et  $(X - 1)^2$  divise  $P - 1$
- $(X^2 + 4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- $P$  est de degré  $3\mathcal{L}$ , est divisible par  $X - 1$ , et admet le même reste lors de ses divisions par  $X - 2$ ,  $X - 3$  et  $X - 4$

## Exercice 6 (\*\*)

Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  dans chacun des cas suivants :

1.  $P = X^3 + X^2 - 2X + 3$  et  $Q = X^2 + 2X - 1$
2.  $P = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ , et  $Q = X^2 - 3X + 1$
3.  $P = X^4 - 2X^2 \cos(2\theta) + 1$  et  $Q = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$
4.  $P = X^3 - iX^2 - X$ , et  $Q = X - 1 + i$ ,
5.  $P = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$  et  $Q = X^2 + 1$  (on donnera uniquement le reste)

## Exercice 7 (\*\*)

Déterminer tous les entiers  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquels  $X^2 + X + 1$  divise  $(X^4 + 1)^n - X^n$ .

## Exercice 8 (\*)

Trouver deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $P = X^3 - 2X + 1$  divise  $Q = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ .

## Exercice 9 (\*\*\*)

Montrer que, si  $P \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme quelconque,  $P \circ P - X$  est divisible par  $P - X$ .

## Exercice 10 (\*\*\*)

Déterminer les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour lesquelles le polynôme  $P = X^4 - 4X^3 + \lambda X^2 - 12X + 3$  admet deux racines dont le produit est égal à 1 (ainsi que deux autres sur lesquelles on ne suppose rien du tout !), et factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  si cette condition est vérifiée.

## Exercice 11 (\*\*)

1. Déterminer les valeurs réelles de  $a$  et  $b$  pour lesquels le polynôme  $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 9$  est le carré d'un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$ .
2. Dans ce cas, factoriser  $P$  et  $P - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## Exercice 12 (\*\*\*)

On définit la suite de polynômes  $(P_n)$  par  $P_0 = 2$ ,  $P_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

1. Calculer  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
3. Montrer que,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P_n \left( z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ .
4. En déduire une expression simple de  $P_n(2 \cos(\theta))$ .
5. Déterminer les racines de  $P$ , et sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ .

## Exercice 13 (\*\*)

On note  $a$ ,  $b$  et  $c$  les trois racines complexes (éventuellement confondues) du polynôme  $P = X^3 + X + 1$ . Calculer la valeur des expressions suivantes :  $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ,  $B = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$ ,  $C = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}$  (on ne cherchera surtout pas à calculer explicitement  $a$ ,  $b$  et  $c$ ).

## Exercice 14 (\*\*)

Déterminer les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{C}$  telles que le polynôme  $P = X^3 + X^2 + \alpha X + 6$  admet deux racines  $a$  et  $b$  vérifiant  $a + b = ab$ . Déterminer alors toutes les racines du polynôme.

## Exercice 15 (\*\*)

On note  $P = X^3 + 3X - 2i$ , et  $x, y$  et  $z$  les trois racines complexes de ce polynôme (qu'on ne cherchera pas à calculer). Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = x^n + y^n + z^n$ .

1. Donner les valeurs de  $S_0, S_1$  et  $S_2$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $S_{n+3}$  en fonction de  $S_{n+1}$  et de  $S_n$ .
3. En déduire la valeur de  $S_7$ .

## Exercice 16 (\*\*\*)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -5 \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines  $x, y$ , et  $z$ , et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

Résoudre par le même type de méthode le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

## Exercice 17 (\*\*)

On pose  $P = X^3 - 11X + 12$ .

1. Montrer que  $P$  admet trois racines réelles, appartenant aux intervalles  $] -4, -3[$ ,  $]1, 2[$  et  $]2, 3[$ .
2. En notant  $a, b$  et  $c$  ces trois racines, calculer  $\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)$  (on ne cherchera bien sûr pas de valeur exacte de  $a, b$  et  $c$ ).

## Exercice 18 (\*\*\*)

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $n + 1$  polynômes de degré  $n$  en posant  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$ .

1. Que valent les polynômes  $B_{3,k}$  pour les différentes valeurs de  $k$  pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes  $B_{3,k}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.

3. Que vaut  $\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$  ? Généraliser ce résultat, et en déduire que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $B_{n,k}(x) \in [0, 1]$  (quelles que soient les valeurs de  $n$  et de  $k$ ).

4. Exprimer le polynôme dérivé  $B'_{n,k}$  en fonction de  $B_{n-1;k-1}$  et de  $B_{n-1;k}$ .

5. On pose  $f(x) = x$ , et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$ .

Montrer que,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ .

6. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci  $f(x) = x^2$ .

## Exercice 19 (\*\*\*)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ .

1. Montrer que  $P$  a nécessairement un degré pair, et un coefficient dominant positif.
2. Montrer que si  $d(P) = 2$ , on peut trouver deux polynômes  $Q$  et  $R$  à coefficients réels tels que  $P = Q^2 + R^2$ .
3. Vérifier que, si  $Q, R, S$  et  $T$  sont quatre polynômes quelconques, alors  $(Q^2 + R^2)(S^2 + T^2) = (QS + RT)^2 + (QS - RT)^2$ .
4. Montrer que la propriété démontrée à la question 2 est vraie quel que soit le degré de  $P$ .

## Problème (\*\*\*)

Ce problème présente une méthode pour calculer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ , qui fait intervenir des polynômes (et un petit peu de trigonométrie). Si vous êtes sages, nous verrons d'autres méthodes pour calculer cette même « somme infinie » (on parlera de séries d'ici la fin de l'année) dans certains chapitres ultérieurs.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule  $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ . Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative de cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de  $]0, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. On définit, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , le polynôme  $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$ .
  - (a) Donner le degré et le coefficient dominant de  $Q_n$ .
  - (b) Déterminer les racines du polynôme  $Q_n$  (on doit trouver  $n-1$  nombres imaginaires purs).
  - (c) Vérifier que ces racines sont simples, et en déduire la factorisation de  $Q_n$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

3. On définit, toujours pour  $n \geq 1$ , un nouveau polynôme  $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k$ .

- (a) Donner les expressions explicites des polynômes  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .
- (b) Montrer que  $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$ .
- (c) En déduire les racines de  $P_n$ , et vérifier qu'elles sont simples.
- (d) Que vaut la somme des racines de  $P_n$  ?

$$\text{En déduire que } \sum_{k=1}^n \left( \cotan \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. (a) Montrer que,  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ .

- (b) En déduire que, sur le même intervalle,  $\cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2(x)$ .

- (c) Appliquer l'encadrement précédent à  $x = \frac{k\pi}{2n+1}$ , en déduire un encadrement de  $\frac{1}{k^2}$ , puis la valeur de la limite recherchée dans cet exercice.

5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}$  :

- (a) Montrer par récurrence que, si  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , alors  $\left( \sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$ .

- (b) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n \left( \cotan \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)^4$  (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme  $P_n$ ).

- (c) Conclure.