

Feuille d'exercices n° 21 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

11 avril 2022

Exercice 1 (*)

Dans chacun des cas, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique et d'écrire leurs coordonnées en colonne dans la matrice A .

1. Calculs immédiats : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On calcule $f(1) = 2X+1$, $f(X) = (2X+1)X - X^2 = X^2+X$, et $f(X^2) = (2X+1)X^2 - 2X^3 = X^2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(1) = \int_X^{X+2} 1 dt = X+2 - X = 2$, $f(X) = \int_X^{X+2} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_X^{X+2} = \frac{1}{2}(X^2+4X+4 - X^2) = 2X+2$, et $f(X^2) = \int_X^{X+2} t^2 dt = \frac{1}{3}[t^3]_X^{X+2} = \frac{1}{3}(X^3+6X^2+12X+8 - X^3) = 2X^2+4X+\frac{8}{3}$.
Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

Pour prouver que s est une symétrie, il suffit de vérifier que $M^2 = I$ (ce qui prouvera que $sos = id$), ce qui est effectivement le cas (difficile de détailler plus le calcul ici). Pour déterminer l'espace par rapport auquel on symétrise, il faut déterminer $\ker(f - id)$, ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} . \text{ Pas trop difficile à résoudre, on garde l'unique équation } x+2y+z=0,$$

soit $z = -x - 2y$. Autrement dit, on symétrise par rapport à l'espace $\text{Vect}((1,0,-1), (0,1,-2))$.

Quand à l'espace parallèlement auquel on symétrise, on cherche cette fois-ci le noyau de $f + id$,

donc on résout le système $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$. La condition $y = 0$ ramène les deux autres

équations à $x = z$, donc l'espace recherché est $\text{Vect}((1,0,1))$.

Exercice 3 (**)

Ce n'est pas si méchant que ça : la division de 1 par $X^2 - X + 1$ s'écrit simplement $1 = 0 \times (X^2 - X + 1) + 1$, le reste vaut donc 1, soit $f(1) = 1$. De même, $f(X) = X$. Il faut réfléchir un tout petit peu plus ensuite : $X^2 = 1 \times (X^2 - X + 1) + X - 1$, donc $f(X^2) = X - 1$, et enfin, avec un poil d'astuce, $X^3 = X \times (X^2 - X + 1) + X^2 - X = (X + 1) \times (X^2 - X + 1) - X + X - 1$, donc $f(X^3) = -1$. On peut aussi, bien entendu, effectuer vraiment la division euclidienne. La matrice dans la base canonique

de f est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul inimaginablement palpitant permet de constater

que $A^2 = A$ (mais si!), l'application f est donc un projecteur (ce qui n'a rien de surprenant, le reste de notre division étant de degré au maximum 1, si on refait une division par $X^2 - X + 1$, il ne se passera plus rien). Si on souhaite déterminer le noyau en résolvant le système, en notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on a simplement les deux équations $a - c - d = b + c = 0$ (les deux autres lignes étant nulles), soit $c = -b$, et $d = a + b$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}(1 + X^3, X - X^2 + X^3)$. En fait, on sait très bien que ce noyau est constitué des multiples de $X^2 - X + 1$, on peut vérifier que cela correspond bien à ce qu'on vient d'obtenir. Pour l'image, en prenant les vecteurs-colonnes de la matrice représentative, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X, X - 1, -1) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 4 (**)

On peut bien sûr essayer d'exprimer les trois vecteurs de la base \mathcal{C} en fonction de ceux de la base \mathcal{B} (trois systèmes de trois équations à trois inconnues à résoudre), mais on peut aller un tout petit

peu plus vite en exploitant intelligemment les matrices de passage : en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} , et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ celle de la base

canonique vers \mathcal{C} , alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$ (en effet, en notant X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique, et X_1, X_2 ses coordonnées dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , on sait que $X = PX_1$ et $X = QX_2$, dont on déduit $X_1 = P^{-1}X = P^{-1}QX_2$, et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$). Commençons donc par calculer l'inverse de P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

1. La linéarité de l'application est évidente, et nous allons tout simplement démontrer que c'est un endomorphisme en calculant les images des vecteurs de la base canonique (ce qui est nécessaire pour déterminer la matrice) et en constatant qu'elles sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, $\varphi(1) = 1 - 2X$, $\varphi(X) = X^2 + X + 1 - 2X^2 + X = -X^2 + 2X + 1$, et $\varphi(X^2) = 2X^3 + 2X^2 + 2X - 2X^3 + X^2 = 3X^2 + 2X$. La matrice de l'application est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. On peut par exemple prouver que f est injective (ce sera suffisant puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie) en déterminant son noyau. D'après les calculs de la question précédente, $f(aX^2 + bX + c) = 3aX^2 + 2aX - bX^2 + 2bX + b + c - 2cX$. Cette image s'annule si $3a - b = 2a + 2b - 2c = b + c = 0$. On en déduit les conditions $a = \frac{1}{3}b$ et $c = -b$, en

remplaçant dans la deuxième équation on obtient alors $\frac{2}{3}b + 2b + 2b + 0$, donc $b = a = c = 0$. Le noyau est donc réduit au polynôme nul, et f est injective, donc bijective. Pour déterminer un antécédent de $X^2 - 1$, qui a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ dans la base canonique, on exploite

A et on résout le système $\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + 2b + 2c = 0 \\ -b + 3c = 1 \end{cases}$. La deuxième équation donne

$a = b + c$, la première $a = -1 - b = -3c$ et la dernière $b = 3c - 1$. En remplaçant, on a donc $-3c = 4c - 1$, soit $c = \frac{1}{7}$, puis $a = -\frac{3}{7}$ et $b = -\frac{4}{7}$. Bon, c'est moche, mais $P = \frac{1}{7}(X^2 - 4X - 3)$ est un antécédent (et même le seul) de $X^2 - 1$ par φ .

3. D'après la question précédente, on connaît déjà une solution de l'équation ! Il ne reste plus qu'à déterminer la solution générale de l'équation homogène associée $y' - \frac{2x-1}{x^2+x+1}y = 0$. Pour cela, il faut réussir à calculer (par exemple) $\int^x \frac{2t-1}{t^2+t+1} dt = \int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{2}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{8}{3} \int_0^x \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2 + 1} dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$. Il ne reste plus qu'à ajouter à cette superbe fonction la solution particulière obtenue plus haut pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle, qui sont donc les fonctions $y : x \mapsto K \ln(x^2+x+1) + \frac{4K}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{7}(x^2-4x-3)$, avec $K \in \mathbb{R}$. On est bien contents de le savoir.

Exercice 6 (***)

- Il suffit de constater que $u \circ (u + id) = -id$ pour comprendre que u est bijectif, de réciproque $u^{-1} = -u - id$.
- Il suffit de prouver que $u(x)$ ne peut pas être proportionnel à x . Supposons donc $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \neq 0$ puisque le noyau de u est réduit au vecteur nul). Alors $u^2(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x + \lambda x + x = 0$ en reprenant l'hypothèse faite sur u . On doit donc avoir $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est difficile dans la mesure où cette équation a un discriminant négatif, et donc pas de racine réelle.
- Prenons donc un x quelconque (non nul quand même) de \mathbb{R}^4 , $(x, u(x))$ forme une famille libre d'après la question précédente. Choisissons désormais un $y \neq 0$ tel que $u(y) \notin \text{Vect}(x, u(x))$. C'est certainement possible puisque l'image de u est \mathbb{R}^4 tout entier (l'application est bijective). Un tel y ne peut lui-même pas appartenir à $\text{Vect}(x, u(x))$, puisque toute combinaison linéaire de x et de $u(x)$ a une image par u qui est elle-même dans $\text{Vect}(x, u(x))$ (rappelons que $u(u(x)) = -u(x) - x$). La famille $(x, u(x), y, u(y))$ est donc nécessairement une famille libre de \mathbb{R}^4 , et par conséquent en forme une base. La matrice de u dans cette base est exactement celle demandée, puisque $u(u(x)) = -u(x) - x$ et $u(u(y)) = -u(y) - y$, toujours à cause de l'équation vérifiée par u .

Exercice 7 (**)

Chercher une telle base revient à chercher trois vecteurs (u, v, w) tels que $f(u) = 0$, $f(v) = -v$ et $f(w) = v - w$ (accessoirement, il serait bon que ces trois vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3 . Puisque $f(x, y, z) = (-x+z, -x-2y+z, -x-y+z)$, on va pouvoir résoudre trois jolis systèmes. Le premier système (celui pour lequel $f(u) = 0$) se ramène tellement trivialement à l'unique équation $x = z$ que je ne l'écris même pas. Nous prendrons donc $u = (1, 0, 1)$. Pour le deuxième vecteur, $f(v) = -v$

se traduit par $\begin{cases} -x & + & z & = & -x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{cases}$. Bon, une fois constaté que $z = 0$, il reste la seule

condition $y = -x$, on peut donc prendre $v = (1, -1, 0)$. Reste désormais à trouver un vecteur w tel

que $f(w) = v - w$, ce qui se traduit par $\begin{cases} -x & + & z & = & 1 - x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 - y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{cases}$. Cette fois, la première

équation donne $z = 1$, donc $-x - y = -2$ (les deux dernières équations sont encore identiques). Pour ne pas s'embêter, $w = (1, 1, 1)$ fera l'affaire. Il est très facile de constater que (u, v, w) est bien une

base de \mathbb{R}^3 . De toute façon, on va devoir inverser la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la

base canonique vers (u, v, w) pour la suite des calculs, ce qui prouvera que la famille est une base.

Utilisons la méthode de la résolution de système pour cela : $\begin{cases} x + y + z = a \\ -y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$. La différence des deux équations extrêmes donne $y = a - c$. La deuxième équation donne alors $z = b + y = a + b - c$, puis $x = c - z = 2c - a - b$. On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Reste à calculer des puissances : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons par exemple C et N ces deux matrices, la matrice N est clairement nilpotente et on vérifie aisément que $N^2 = 0$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton (les deux matrices commutent : $CN = NC = -N$), on trouve alors $B^n = (C + N)^n = C^n + nC^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Comme on sait que $P^{-1}AP = B$, la récurrence classique permet de constater que $A^n = PB^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 1 puisque $PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et si on le suppose au rang n , alors $A^{n+1} = AA^n = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Pour achever ce brillant exercice, il ne reste plus qu'à calculer A^n : $PB^n = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (1-n)(-1)^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & n-2 \\ n & n+1 & -n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (**)

- Il suffit de calculer le produit des deux matrices $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I =$

$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et constater qu'il est en effet nul. D'ailleurs, on peut se contenter de calculer

la première ligne, les deuxième et troisième ligne de $M - I$ étant des multiples de la première, on obtiendra également des zéros sur celles-ci.

- Les deux sous-espaces en question ont une intersection clairement réduite au vecteur nul, on peut difficilement vérifier à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = -3u$ sans être nul. Comme on n'a pas encore d'information sur les dimensions, prouver directement que la somme des deux espaces est égale à \mathbb{R}^3 demande une certaine dose d'astuce. En gros, il faut écrire $u = v + w$, avec $f(v) = v$ et $f(w) = -3w$ (pour que v et w appartiennent aux deux noyaux). On sait, d'après la question précédente, que $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $f^2(u) + 2f(u) - 3u = 0$. On peut alors trouver relativement facilement v et w en les cherchant comme combinaisons linéaires de u et de $f(u)$. Ainsi, $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) + 2f(u) - 3u = -3(u - f(u))$, donc tous les multiples de $u - f(u)$ appartiennent à $\ker(f + 3id)$. De même, $f\left(u + \frac{1}{3}f(u)\right) = f(u) + \frac{1}{3}f^2(u) = f(u) - \frac{2}{3}f(u) + u = u + \frac{1}{3}f(u)$, donc tous les multiples de $u + \frac{1}{3}f(u)$ appartiennent à $\ker(f - id)$. Il ne reste plus qu'à reconstituer u à partir de ces deux morceaux : en posant $v = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à $\ker(f - id)$) et $w = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à l'autre noyau), on obtient bien $u = v + w$, ce qui prouve la supplémentarité des deux noyaux.

- On va procéder par résolution de systèmes. On a déjà calculé plus haut la matrice représentative de $f - id$, son noyau est donc constitué des solutions du système $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$.

Les trois équations sont équivalentes, on garde la simple équation $x = 2y + z$, soit $\ker(f - id) = \text{Vect}((2, 1, 0), (1, 0, 1))$. De même pour l'autre noyau, on résout
$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = c \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $x = z$, et on a donc $4x - 2y = 0$ (les deux équations extrêmes sont identiques), soit $y = 2x$, donc $\ker(f + 3id) = \text{Vect}((1, 2, 1))$. On note en particulier que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f + 3id)) = 1$.

4. Il suffit de prendre la famille $((2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 1))$ (qui est nécessairement une base puisque les deux noyaux sont supplémentaires). Chacun des trois vecteurs ayant une image proportionnelle à lui-même par f , la matrice de f dans cette base sera bien diagonale, plus précisément égale à
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (***)

1. Considérons un vecteur $u \in E$ tel que $f^2(u) \neq 0$ (il en existe forcément d'après l'hypothèse faite sur l'application f). Notons $v = f(u)$ et $w = f^2(u)$. Bien sûr, $v \neq 0$ (sinon on aurait aussi $w = 0$), mais on peut également affirmer que v n'est pas proportionnel à u : si on avait $f(u) = \lambda u$, alors on en déduirait $f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda^2 u$, puis $f^3(u) = \lambda^3 u$. Mais alors on aurait $\lambda = 0$ puisque $f^3 = 0$, ce qui est absurde puisque $v \neq 0$. La famille (u, v) est donc une famille libre. Vérifions maintenant que (u, v, w) reste encore libre. Si on suppose que w est combinaison linéaire de u et de v , on peut écrire $f^2(u) = \lambda f(u) + \mu u$, donc en composant par f , $\lambda f^2(u) + \mu f(u) = 0$, et en composant encore une fois $\mu f^2(u) = 0$, ce qui ne peut arriver que si $\mu = 0$. Mais alors $\lambda = 0$ en remontant nos équations, donc $f^2(u) = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Finalement, (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de \mathbb{R} , donc une base qu'on va subtilement noter \mathcal{B} . La matrice de f dans cette base \mathcal{B} est exactement celle demandée dans l'énoncé (par construction, $f(u) = v$, $f(v) = w$ et $f(w) = f^3(u) = 0$).
2. Soit g un endomorphisme commutant avec f , et N sa matrice dans la base \mathcal{B} . En notant M la matrice obtenue à la question précédente, on doit donc avoir $MN = NM$. Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule alors facilement $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, et $NM = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$. La condition $MN = NM$ se traduit donc par les égalités $b = c = f = 0$, $a = e$, $b = f$, $d = h$ et $e = i$. Autrement dit, les matrices commutant avec M sont de la forme
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}.$$

L'ensemble correspondant est bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qu'on peut même décrire comme $\text{Vect}(I_3, M, M^2)$. L'isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ envoie ce sev sur celui des endomorphismes commutant avec f , qui est donc également de dimension 3, et peut être décrit comme $\text{Vect}(id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

Exercice 10 (**)

1. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, montrer la liberté de la famille suffit. Supposons donc que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, cela se traduit par le système
$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -a - c = 0 \\ -3a + 3b + c = 0 \end{cases}.$$
 La deuxième équation donne immédiatement $c = -a$, ce qui donne en reportant dans les deux autres équations $b - a = 3b - 4a = 0$. Ces deux équations ne sont pas proportionnelles et impliquent donc $a = b = 0$, puis $c = 0$. La

famille est donc bien libre, c'est une base de \mathbb{R}^3 . On en déduit que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

2. Par définition, $s(e_1) = e_1$, $s(e_2) = -e_2$ et $s(e_3) = -e_3$, donc la matrice demandée est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Il n'y a rien à calculer : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En notant $M = \text{Mat}_{\text{can}}(s)$, on sait que $P^{-1}MP = D$, donc $M = PDP^{-1}$. Calculons donc

$$P^{-1} \text{ en résolvant le système } \begin{cases} x + y + 2z = a \\ -x \quad \quad - z = b \\ -3x + 3y + z = c \end{cases}. \text{ La deuxième équation donne}$$

$z = -b - x$ qu'on peut reporter dans les deux autres : $-x + y = a + 2b$ et $-4x + 3y = b + c$.

En multipliant par quatre la première de ces deux équations et en soustrayant la seconde, on a $y = 4a + 7b - c$, puis $x = y - a - 2b = 3a + 5b - c$ et enfin $z = -b - x = -3a - 6b + c$,

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, puis

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ -6 & -11 & 2 \\ -18 & -30 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (***)

1. On pose bien entendu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (quoique les plus tordus puissent changer l'ordre). Il

suffit alors de prendre $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ pour que l'égalité demandée soit vérifiée.

2. Il s'agit, pour changer, de résoudre des systèmes. Pour ne pas trainer de $\frac{1}{2}$ partout, on va tout

multiplier par 2, l'équation $AX = X$ se traduit alors par le système $\begin{cases} -x - 3y + 6z = 2x \\ 3x + 5y - 6z = 2y \\ 3x + 3y - 4z = 2z \end{cases}$.

Les trois équations sont en fait rigoureusement identiques, il ne restent que la condition $x+y =$

$2z$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$. De même, pour l'équation $AX = -2X$, on résout $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ 3x + 9y - 6z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$.

La dernière équation donne $y = -x$, et la première se résume alors (en divisant par 6) à $x + z = 0$, soit $z = -x$. La deuxième équation est alors toujours vérifiée, ce dont on déduit

que $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$.

3. C'est évident vu les formules obtenues, en écrivant en ligne pour simplifier, $S_1 = \text{Vect}((2, 0, 1), (0, 2, 1))$, et $S_{-2} = \text{Vect}((1, -1, -1))$.

4. Au vu des calculs précédents, il suffit de prendre pour P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La récurrence habituelle nous permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en notant D la matrice

diagonale de l'énoncé) : c'est vrai au rang 1 car $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et en le supposant vrai au rang n , alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^n P^{-1} P D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$. Il reste à calculer

P^{-1} , par exemple par la méthode du système :
$$\begin{cases} 2x & + & z & = & a \\ & 2y & - & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{cases}$$
. Procédons par

substitution : $x = \frac{a-z}{2}$ et $y = \frac{b+z}{2}$, donc $\frac{a}{2} - \frac{z}{2} + \frac{b}{2} + \frac{z}{2} - z = c$, soit $z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - c$,

puis $x = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$ et $y = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} - \frac{c}{2}$, soit $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Allez, un petit

produit matriciel pour continuer : $PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 2 & -(-2)^n \\ 1 & 1 & -(-2)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^n P^{-1} =$

$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - (-2)^{n+1} & -2 - (-2)^{n+1} & 4 - (-2)^{n+2} \\ 2 + (-2)^{n+1} & 6 + (-2)^{n+1} & -4 + (-2)^{n+2} \\ 2 + (-2)^{n+1} & 2 + (-2)^{n+1} & (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$. Puisque $X_n = A^n X_0$, on en déduit (en

simplifiant tout par 2), que $x_n = \frac{(1 + (-2)^n)x_0 + (-1 + (-2)^n)y_0 + (2 + (-2)^{n+1})z_0}{2}$,

$y_n = \frac{(1 - (-2)^n)x_0 + (3 - (-2)^n)y_0 + (-2 - (-2)^{n+1})z_0}{2}$,

et $z_n = \frac{(1 - (-2)^n)x_0 + (1 - (-2)^n)y_0 - (-2)^{n+1}z_0}{2}$.

Exercice 12 (*)

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2 + 1) + y(X + 1) + z(2X^2 - X)$, ce

qui revient au système
$$\begin{cases} x & + & y & & = & c \\ & & y & - & z & = & b \\ x & & & + & 2z & = & a \end{cases}$$
. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$,

on trouve $z = a + b - c$, puis on en déduit aisément que $y = z + b = a + 2b - c$ puis $x = c - y = -a - 2b + 2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de

passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a , b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).

3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2 + 1) - 3(X + 1) - 2(2X^2 - X)$.

4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire

la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base \mathcal{B} , la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP =$

$P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.

2. Pour le noyau, on résout le système
$$\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$
. En prenant la deuxième

équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les

vecteurs invariants par f , et donc de résoudre le système
$$\begin{cases} 3x - 2y - 4z = x \\ x - 2z = y \\ x - y - z = z \end{cases}$$
. Les

équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\text{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1))$.

3. La famille $((2, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 (en effet, si $a(2, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, en composant par f , on obtient $b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$, la matrice de passage de la base canonique à notre famille est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image

nulle par f , les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Exercice 14 (*)

- les matrices A_1 et B_1 n'ont pas la même trace, elles ne peuvent pas être semblables.
- les matrices A_2 et B_2 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, 0, 0)$, A_2 est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , et B_2 est la matrice de cette même application f dans la base $((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ (vérifications triviales).
- les matrices A_3 et B_3 ne sont pas semblables pour une raison un peu subtile : $A_3^2 = 0$, mais $B_3^2 \neq 0$ (en fait $B_3^2 = A_3$). Or, si on avait une relation du type $B_3 = P^{-1}A_3P$, on aurait également $B_3^2 = P^{-1}A_3^2P$, ce qui impliquerait $B_3^2 = 0$.
- les matrices A_4 et B_4 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, z, 0)$, A_4 est la matrice de f dans la base canonique, et B_4 est la matrice de la même application f dans la base $((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$ (encore une fois les vérifications sont triviales).

Exercice 15 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système
$$\begin{cases} (3 - \lambda)x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y + 6z = 0 \\ 2x - 2y - (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$
. Additions

donc les deux dernières équations pour obtenir $(4 - \lambda)y + (4 - \lambda)z = 0$. Si $\lambda = 4$, cette équation disparaît et il ne reste plus que les deux autres conditions $-x - 2y - 3z = -2x + 2y + 6z = 0$. On peut les additionner pour trouver $-3x + 3z = 0$, donc $z = x$, puis $y = x - 3z = -2x$, dont on déduit que $\ker(f - 4id) = \text{Vect}((1, -2, 1))$. Supposons désormais que $\lambda \neq 4$, on a alors $y + z = 0$, donc $z = -y$, qu'on peut reporter dans nos deux premières équations : $(3 - \lambda)x + y = 0$ et $-2x - \lambda y = 0$. Effectuons alors l'opération $L_2 + \lambda L_1$ pour trouver $(-2 + 3\lambda - \lambda^2)x = 0$. L'équation $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ admet pour racines évidentes $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Si λ est différent de 1, 2 ou 4, on obtiendra $x = 0$, puis $y = z = 0$ et le noyau sera donc nul. Dans le cas où $\lambda = 1$, on conserve une des deux équations faisant intervenir x et y (équations qui sont équivalentes) : $2x + y = 0$, donc $y = -2x$. Avec la condition précédente

$z = -y$, on peut donc conclure $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, -2, 2))$. On procède de même lorsque $\lambda = 2$: l'équation restante est $x + y = 0$, donc $y = -x$, puis $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

2. Ce sont exactement les valeurs pour lesquelles le noyau n'est pas nul, donc 1, 2 et 4.
3. Le calcul a déjà été effectué dans la première question.
4. Il suffit de prendre la base $((1, -2, 2), (1, -1, 1), (1, -2, 1))$, dans laquelle la matrice de f sera, d'après les calculs précédents, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bien sûr, il faudrait tout de même vérifier

que c'est une base de \mathbb{R}^3 . En fait, ce sera toujours le cas dans ce genre de situation. Notons donc u, v et w les trois vecteurs, qui vérifient $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 4w$. Supposons maintenant que $au + bv + cw = 0$, alors $(f - id)(au + bv + cw) = 0$, soit $bv + 3cw = 0$. Appliquons maintenant $f - 2id$ à $bv + 3cw$ pour obtenir $6cw = 0$. On en déduit que $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$ en remontant, la famille est donc libre et constitue une base de \mathbb{R}^3 . Les plus motivés d'entre vous prouveront plus généralement en utilisant cette technique qu'une famille de vecteurs (u_1, \dots, u_k) de \mathbb{R}^n qui sont vecteurs propres d'une même application linéaire f pour des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ deux à deux distinctes forment nécessairement une famille libre. Sinon, vous attendrez la démonstration de votre professeur de mathématiques préféré l'an prochain.

Exercice 16 (**)

1. Il suffit d'écrire les coefficients dans le bon ordre : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. En observant les coefficients hors de la diagonale, on constate qu'ils ont été multipliés par 3 par rapport à ceux de la matrice A . Comme $3A$ a pour coefficients diagonaux 6, 0 et 6, on en déduit facilement que $A^2 = 3A - 2I$. L'application f vérifie donc $f^2 = 3f - 2id$, soit $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}id\right) = -id$. On en déduit que f est bijective et que sa réciproque f^{-1} vérifie $f^{-1} = \frac{3}{2}id - \frac{1}{2}f$.
3. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} (2 - \lambda)x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & (2 - \lambda)z & = & 0 \end{cases}$$
. L'opération $L_3 - L_2$ donne $(\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0$. On a donc un premier cas particulier à traiter : si $\lambda = 1$, le système se réduit aux deux premières équations $x - y + z = 0$ et $x - y + z = 0$. Ah, en fait, il n'y a qu'une seule équation, et on en déduit directement que $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Revenons au cas général $\lambda \neq 1$, la dernière équation peut alors se simplifier en $z = y$, et on remplace dans les deux équations restantes : $(2 - \lambda)x = 0$ et $x + (1 - \lambda)y = 0$. Si $\lambda \neq 2$, on obtient très rapidement $x = 0$, puis $y = 0$ puisqu'on a déjà supposé $\lambda \neq 1$. Le seul autre cas à considérer est donc $\lambda = 2$, pour lequel il nous reste comme dernière équation (en plus de la condition $z = y$) $x - y = 0$, donc $x = y$. La conclusion est encore une fois très rapide : $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Bien entendu, si $\lambda \notin \{1, 2\}$, on a simplement $\ker(f - \lambda id) = \{0\}$. En particulier, les seules valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda id$ n'est pas injective (et donc pas un automorphisme) sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.
4. Comment dire ? On vient de le faire. Précisons quand même que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f - 2id)) = 1$.

5. La somme de leurs dimensions étant égale à 3, donc la dimension de E , il suffit de vérifier que leur intersection est nulle. Pour cela, on constate simplement qu'un vecteur u vérifiant à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ est solution de l'équation $2u = u$, donc est bien le vecteur nul.
6. (a) C'est une sorte de système complètement trivial à résoudre. En soustrayant les deux conditions demandées, on doit avoir $p = f - id$, et on en déduit directement que $q = id - p = 2id - f$.
- (b) Pas besoin d'exprimer explicitement ces applications, on va faire un calcul formel exploitant la relation $f^2 = 3f - 2id$ démontrée plus haut. Calculons donc $p^2 = (f - id)^2 = f^2 - 2f + id = 3f - 2id - 2f + id = f - id = p$, ce qui prouve que p est bien un projecteur. De même, $q^2 = (2id - f)^2 = 4id - 4f + f^2 = 4id - 4f + 3f - 2id = 2id - f$, et q est aussi un projecteur. Enfin, on calcule $p \circ q = (f - id) \circ (2id - f) = 2f - f^2 - 2id + f = 3f - 2id - f^2 = 0$. Le calcul de $q \circ p$ est exactement le même et donne évidemment le même résultat.
7. On va effectuer une petite récurrence : pour $n = 0$, $2^0 p + q = p + q = id = f^0$, donc la relation est vérifiée. Si on la suppose vérifiée au rang n , alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (2^n p + q) \circ (2p + q) = 2^{n+1} p^2 + 2^n p \circ q + 2q \circ p + q^2 = 2^{n+1} p^2 + q^2$ d'après les relations démontrées à la question précédente, donc la propriété est bien héréditaire, et vraie pour tout entier naturel. Pour $n = 1$, on devrait donc avoir $f^{-1} = \frac{1}{2} p + q = \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} id + 2id - f = \frac{3}{2} id - \frac{1}{2} f$. C'est bien le cas !

Problème 1 (***)

1. Puisqu'on sait que l'élève mange à l'heure 0, l'énoncé nous donne immédiatement $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 0$. Pour les probabilités suivantes, on est obligés d'utiliser la formule des probabilités totales (ou de faire un arbre complet jusqu'à la troisième heure, ce qui n'est pas encore trop violent) : $a_2 = \frac{1}{4} c_1 = \frac{1}{8}$ (il ne peut travailler que s'il dormait à l'heure précédente, on sait déjà qu'il ne mangeait pas), $b_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} c_1 = \frac{3}{8}$, et $c_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} c_1 = \frac{1}{2}$. Sur le même principe, $a_3 = \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{4} c_2 = \frac{5}{16}$, $b_3 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} c_2 + \frac{3}{16}$, et $c_3 = \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{2} c_2 = \frac{1}{2}$.
2. On peut le voir comme une application de la formule de Bayes, on sait que $P_{A_2}(C_3) = \frac{1}{2}$, donc $P_{C_3}(A_2) = \frac{P(A_2) \times P_{A_2}(C_3)}{P(C_3)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$ (autrement dit, les événements A_2 et C_3 sont indépendants).
3. Les événements A_n , B_n et C_n formant évidemment un système complet d'événements, une application directe de la formule des probabilités totales donne tout de suite $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$ (on ne fait que généraliser les formules déjà appliquées à la première question).
4. (a) Puisqu'on a un système complet d'événements, on sait déjà que $a_n + b_n + c_n = 1$ (inutile de faire le moindre calcul, mais on peut aussi vérifier à l'aide des formules de récurrence), donc (u_n) est constante égale à 1. Pour (v_n) , on peut calculer en utilisant les relations de la question 3 : $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n + \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} c_n - \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} c_n = 0$, donc la suite (v_n) est nulle à partir du rang 1.
- (b) Comme $u_n - v_n = 2c_n$, on en déduit immédiatement que $c_n = \frac{1}{2}$ à partir du rang 1 (ce qui était évident à partir de la relation de récurrence de la suite, soit dit en passant). On peut

alors réécrire les relations de récurrence sous la forme $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{8}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}$. Comme on sait que $a_n + b_n = 1 - c_n = \frac{1}{2}$, on a donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n$. La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique à partir du rang 1, d'équation de point fixe $x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x$ qui donne $x = \frac{1}{4}$. On pose donc $z_n = a_n - \frac{1}{4}$, et on vérifie que cette suite est géométrique : $z_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{2}z_n$. La suite (z_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, et de premier terme $z_1 = a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. On en déduit que $z_n = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis $a_n = z_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Plusieurs possibilités pour en déduire la valeur de b_n , bien entendu sans refaire de calcul longs : on peut par exemple exploiter que $b_n = \frac{1}{2} - a_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

- (c) La limite de (c_n) est bien sûr égale à $\frac{1}{2}$, les deux autres suites ont pour limite $\frac{1}{4}$. On en déduit qu'à long terme, le taupin va dormir la moitié du temps, manger le quart du temps et quand même travailler sa physique le quart du temps restant.

5. (a) On pose simplement $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- (b) Il suffit de faire une petite récurrence. La propriété est sûrement vérifiée au rang 0 puisque $A^0 X_0 = X_0$, et si on la suppose vraie au rang n , alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui prouve l'hérédité.

- (c) Commençons donc par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On

vérifie alors facilement que $A^3 + \frac{1}{2}(A^2 + A)$. La matrice A ne peut pas être inversible : si c'était le cas, on pourrait écrire $2A^3 - A^2 - A = A(2A^2 - A - I) = 0$, donc $2A^2 - A - I = 0$ (en multipliant par A^{-1}). Or, $2A^2 - A$ n'est pas du tout la matrice identité (ça ne marche même pas pour le premier coefficient). La matrice A n'est donc pas inversible.

- (d) Utilisons par exemple la méthode du système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + z = b \\ 2y - 2z = c \end{cases}$. La dif-

férence des deux premières équations donne $2x = a - b$, soit $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; la somme des trois équations donne $4y = a + b + c$, soit $y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$, dont on déduit que $z = y - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c$ en reprenant la dernière équation. La matrice P est donc

inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

- (e) On calcule par exemple d'abord $AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^n P^{-1}$: c'est vrai trivialement au rang 0 puisque $P^{-1}IP = I = A^0$, et en supposant la formule vraie au rang n , on aura $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^n P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Les puissances de la matrice D étant triviales,

il ne reste plus qu'un petit calcul matriciel pour terminer : $PD^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 1 & 0 \\ -(-\frac{1}{2})^n & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

puis $PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à appliquer la

formule $X_n = A^n X_0$ pour retrouver $a_n = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; $b_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $c_n = \frac{1}{2}$.

6. (a) La linéarité est triviale. Pour le noyau, on va évidemment résoudre le système

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ (quitte à multiplier les équations par 2 ou par 4 pour simplifier).}$$

On a donc $z = -2x = -2y$ donc $x = y$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. On a donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, -2))$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$, et le théorème du rang nous permet d'affirmer que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Pour l'image, on peut bien sûr calculer les images des vecteurs de la base canonique, ou plutôt de ces vecteurs multipliés par 2, 2 et 4 pour éviter les fractions : $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 2))$. Le dernier vecteur étant la somme des deux autres, une base de l'image est $((0, 1, 1); (1, 0, 1))$. L'application n'étant pas injective (ni surjective), ce n'est pas un automorphisme.

(b) Encore des systèmes à résoudre. Attention, si on multiplie pour éviter les fractions, à ne pas

$$\text{oublier de multiplier aussi le } -id. \text{ Pour } F, \text{ on se ramène donc à } \begin{cases} -4x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

En soustrayant les deux premières équations, $-6x + 6y = 0$, soit $x = y$. On a alors $z - 2x = 0$ (toutes les équations se ramènent à cette condition), soit $z = 2x$. On en déduit

$$\text{que } F = \text{Vect}((1, 1, 2)). \text{ De même pour } G, \text{ on doit avoir } \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases},$$

ce qui se résout trivialement : $z = 0$ et $y = -x$, donc $G = \text{Vect}((1, -1, 0))$.

(c) Au vu des calculs de bases précédents, on souhaite donc écrire un vecteur $u = (x, y, z)$ sous la forme $u = a(1, 1, 2) + b(1, -1, 0) + c(1, 1, -2)$, ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a - b + c = y \\ 2a - 2c = z \end{cases}.$$

En soustrayant les deux premières équations on a $b = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$, et en additionnant les trois équations on trouve $a = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$.

Il ne reste plus qu'à en déduire que $c = a - \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z$ (en fait c'est le même calcul que celui de l'inverse de la matrice P dans la partie précédente, ce qui est d'ailleurs complètement normal). La solution du système étant unique, la décomposition souhaitée existe et est elle aussi unique. Avec les notations de l'énoncé, on a donc

$$u_F = a(1, 1, 2) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z; \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z; \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right), \text{ et de même } u_G = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y; \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x; 0\right) \text{ et } u_H = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z; \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z; \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right).$$

(d) Par définition, on a $p(u) = u_F$, donc $p \circ p(u)$ a pour coordonnées :

- $\frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{1}{16}z + \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{1}{16}z + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$
- exactement pareil pour la deuxième coordonnée.
- pareil mais tout multiplié par deux pour la troisième coordonnée.

On constate donc aisément que $p \circ p = p$, donc p est un projecteur. On calcule de même les trois coordonnées de $q^2(u) = q(u_G)$:

- $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$
- pareil au signe près pour la deuxième coordonnées, ce qui donne donc $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$
- 0 pour la dernière coordonnée

On reconnaît sans peine $q^2 = q$ donc q est un projecteur. Enfin pour r :

- $\frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y - \frac{1}{16}z + \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z$
- pareil pour la deuxième coordonnée
- pareil à un facteur -2 près pour la dernière coordonnée

Là encore, on a bien $r^2 = r$, donc r est un projecteur. Pas besoin de gros calculs pour les composées par f (pour ce qui précède non plus si on est malin, d'ailleurs). Par définition, $p(u) = u_F \in F = \ker(f - id)$, donc $f(p(u)) = p(u)$, ce qui revient à dire que $f \circ p = p$. De même, $f \circ q = -\frac{1}{2}q$ et $f \circ r = 0$.

- (e) Comme l'énoncé n'est pas assez gentil, regardons ce qui se passe pour de petites valeurs de n , en essayant d'exploiter les projecteurs p , q et r : déjà, par définition $u = u_F + u_G + u_H$ donc $u = p(u) + q(u) + r(u)$, ce qui revient à dire que $p + q + r = id$. Composons par f pour obtenir $f = f \circ id = f \circ (p + q + r) = p - \frac{1}{2}q$ (ce qu'on pouvait constater directement). Ensuite, $f^2 = f \circ \left(p - \frac{1}{2}q\right) = p + \frac{1}{4}q$. On devine alors que $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$, ce qu'on démontre bien entendu à l'aide d'une récurrence triviale en utilisant la question précédent : on a déjà largement ce qu'il faut pour l'hérédité, et en supposant la propriété vraie au rang n , alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ \left(p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q\right) = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q$. En reprenant les expressions explicites, $f^n(x, y, z) = \left(\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)x + \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)y + \frac{1}{4}z; \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)x + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)y + \frac{1}{4}z; \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$.
- (f) Il suffit en fait de constater que $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = f(a_n, b_n, c_n)$, ce dont on déduit facilement que $(a_n, b_n, c_n) = f^n(a_0, b_0, c_0)$ (une récurrence extrêmement facile si on veut être rigoureux), puis les valeurs prises par les trois suites.

Problème 2 (**)

A. Calcul matriciel.

1. Un calcul trivial donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, soit effectivement

$$A^3 = 2A.$$

2. Puisque A est la matrice représentative de f dans la base canonique, on a $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$. On en déduit que $u(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1))$. L'unique vecteur $(1, 0, -1)$ constitue bien entendu une base de ce noyau puisqu'il est non nul.

Effectuons un calcul similaire pour le second noyau, en résolvant le système

$$\begin{cases} y & = \sqrt{2}x \\ x + z & = \sqrt{2}y \\ y & = \sqrt{2}z \end{cases}. \text{ Ce système se résout tout seul : } x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}y, \text{ et l'équation du}$$

milieu est alors automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f - \sqrt{2}id) = \{(x, \sqrt{2}x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$, et l'unique vecteur $(1, \sqrt{2}, 1)$ constitue encore une fois manifestement une base du noyau.

3. Pour ne pas avoir à faire plusieurs fois les mêmes calculs, on peut anticiper en regardant ce qui est demandé à la question suivante et noter immédiatement P la matrice de la famille \mathcal{B}' (on ne sait pas encore qu'il s'agit d'une base) dans la base canonique, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si cette matrice P est inversible, ce qu'on va vérifier en lui appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{lll} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2 \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. On l'a déjà fait à la question précédente : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On l'a déjà fait à la question précédente la question précédente : $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

6. Le but de la question est bien entendu d'utiliser la formule du cours $A' = P^{-1}AP$, où A est la matrice de f dans la base canonique (c'est la définition même de f qui nous le confirme). Il ne

reste plus qu'à effectuer le produit matriciel : $AP = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, puis $A' = P^{-1}AP =$

$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$, soit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alternativement, les plus paresseux

auront constaté que $f(u) = 0$ (ce qui découle du calcul du noyau de f), $f(v) = \sqrt{2}v$ (découle du calcul du deuxième noyau de la question 2), et $f(w) = -\sqrt{2}w$ (là il faut écrire le calcul), ce qui traduit exactement le fait que la matrice de f dans la base (u, v, w) est diagonale, avec comme coefficients $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sur la diagonale.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Par définition (et d'après le calcul de A^2 effectué dans la première partie de l'exercice), $F = \{aI + bA + cA^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I, A, A^2)$, ce qui suffit à prouver que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I, A, A^2) forme une famille génératrice de F . Or, la famille (I, A, A^2) est également libre : si on suppose que $aI + bA + cA^2 = 0$, avec a, b et c trois réels quelconques, la nullité des trois coefficients sur la première colonne impose $a + c = b = c = 0$, donc $a = b = c = 0$. La famille est donc libre, et il s'agit donc d'une base de F , qui est accessoirement un espace vectoriel de dimension 3.
2. Soit $\forall M \in F$, d'après la question précédente, $M = aI + bA + cA^2$, donc $AM = aA + bA^2 + cA^3$. Or on a prouvé dans la première partie que $A^3 = 2A$, donc $AM = (a+2c)A + bA^2 \in F$ (puisque cette matrice est combinaison linéaire de deux matrices appartenant à F).
3. (a) On vient de prouver que $AM \in F$ pour toute matrice $M \in F$, ce qui prouve que l'application g est bien définie et à valeurs dans F . Reste à prouver qu'elle est linéaire : si M et N sont deux matrices de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $g(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda g(M) + g(N)$, ce qui prouve la linéarité de g , qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel F .
 (b) On a déjà plus ou moins calculé plus haut $g(I) = A$, $g(A) = A^2$ et $g(A^2) = A^3 = 2A$, ce qui donne immédiatement pour matrice de g dans la base (I, A, A^2) la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 (c) Deux possibilités : soit on procède matriciellement, soit on effectue un calcul direct à partir de la définition de g . Si on choisit cette deuxième option, on calcule $g \circ g(M) = A^2M$, puis $g \circ g \circ g(M) = A^3M = 2AM = 2g(M)$, ce qui prouve bien que $g^3 = 2g$ (l'égalité est vraie quelle que soit la matrice M). Sinon, à l'aide de la matrice calculée à la question précédente, il suffit de vérifier que $B^3 = 2B$ (ce qui est facile) pour conclure.
 (d) D'après la question précédente, on a $g \circ (g^2 - 2id) = g^3 - 2g = 0$, ce qui suffit à affirmer que $\text{Im}(g^2 - 2id) \subset \ker(g)$. En effet (si on ne connaît pas ce théorème), si $y \in F$ est un élément de l'image de $g^2 - 2id$, cela signifie qu'on peut trouver un x appartenant à F tel que $y = g^2(x) - 2x$, mais alors $g(y) = g^3(x) - 2g(x) = 0$ d'après la question précédente, ce qui prouve que $y \in \ker(g)$, et donc l'inclusion souhaitée.
 (e) Soit $M \in F$, d'après la question 1, on peut écrire que $M = aI + bA + cA^2$, puis que $g(M) = (a + 2c)A + bA^2$. Comme (I, A, A^2) forme une base de F , la matrice $g(M)$ est nulle si et seulement si $a + 2c = b = 0$, soit $b = 0$ et $a = -2c$, ou encore si $M = c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(g) = \text{Vect}(A^2 - 2I)$, et l'unique matrice (non nulle) $A^2 - 2I$ forme une base de ce noyau.
 (f) D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(F) = 3$. Or, la question précédente montre que $\dim(\ker(g)) = 1$, donc $\dim(\text{Im}(g)) = 2$.

- (g) On constate aisément que $g(I + A) = A + A^2$, mais rien de nous prouve que c'est la seule matrice pour laquelle l'égalité est vraie. En fait, on sait même que ce n'est pas le cas : $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow g(M) = g(I + A) \Leftrightarrow g(M - I - A) = 0 \Leftrightarrow M - I - A \in \ker(g)$. On a déterminé le noyau de g plus haut, on peut donc conclure que tous les antécédents de $A + A^2$ par l'application g sont les matrices de la forme $M = I + A + c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$.