

# Feuille d'exercices n° 21 : Matrices et algèbre linéaire

MPSI Lycée Camille Jullian

11 avril 2022

## Exercice 1 (\*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel  $E$  des applications linéaires suivantes (on ne vérifiera pas la linéarité) :

1.  $f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - z, -x - 3y + 2z)$ ,  $E = \mathbb{R}^3$
2.  $f(P) = (2X + 1)P - X^2P'$ ,  $E = \mathbb{R}_2[X]$
3.  $f(P) = \int_X^{X+2} P(t) dt$ ,  $E = \mathbb{R}_2[X]$
4.  $f(M) = AM + MB$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

## Exercice 2 (\*)

Soit  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Prouver que  $s$  est une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

## Exercice 3 (\*\*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  de l'application  $f$  qui, à un polynôme  $P$ , associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 - X + 1$ . Vérifier à l'aide de cette matrice que  $f$  est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques.

## Exercice 4 (\*\*)

Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$  vers la base  $\mathcal{C} = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$ .

## Exercice 5 (\*\*)

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme, et donner sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. L'application  $\varphi$  est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par  $\varphi$  de  $X^2 - 1$ .
3. Résoudre l'équation différentielle  $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$ .

## Exercice 6 (\*\*\*)

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  un morphisme vérifiant  $u^2 + u + id = 0$ .

1. Montrer que  $u$  est bijectif, et déterminer  $u^{-1}$  en fonction de  $u$ .
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul  $x$ ,  $\text{Vect}(x, u(x))$  est de dimension 2.

3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 7 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  devient  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer les puissances de la matrice  $B$ , puis celles de  $A$ .

### Exercice 8 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$ .
2. En déduire que  $\ker(f - id) \oplus \ker(f + 3id) = \mathbb{R}^3$ .
3. Donner la dimension et une base de chacun des deux noyaux de la question précédente.
4. Sans faire de calculs, déterminer une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale (et donner cette matrice).

### Exercice 9 (\*\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  un endomorphisme tel que  $f^3 = 0$  mais  $f^2 \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Déterminer l'ensembles des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  commutant avec  $u$ . On montrera en particulier qu'ils forment un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ .

### Exercice 10 (\*\*)

Soient  $e_1 = (1, -1, -3)$ ,  $e_2 = (1, 0, 3)$  et  $e_3 = (2, -1, 1)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}(e_1)$  et  $G = \text{Vect}(e_2, e_3)$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Que peut-on en déduire sur  $F$  et  $G$ ?
2. On note  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Quelle est la matrice de  $s$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Calculer la matrice de passage  $P$  de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$ .
4. Calculer la matrice de  $s$  dans la base canonique en exploitant les questions précédentes, en déduire l'expression analytique de  $s$ .

### Exercice 11 (\*\*\*)

On considère trois suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  définies par leurs premiers termes  $x_0, y_0, z_0$  et les relations suivantes :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n)$ ,  $y_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n)$  et  $z_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n)$ .

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme  $X_{n+1} = AX_n$  où  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et  $X_n, X_{n+1}$  sont des matrices colonnes.

- Déterminer  $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$  et  $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$ .
- Montrer que  $S_1$  et  $S_{-2}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , et en donner des bases.
- En déduire qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculer la matrice  $A^n$  et en déduire  $X^n$  en fonction de  $X_0$ .

### Exercice 12 (\*)

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et on note  $\mathcal{B}$  la famille  $(X^2 + 1, X + 1, 2X^2 - X)$ .

- Vérifier que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$ , et celle de  $\mathcal{B}$  vers la base canonique.
- Déterminer les coordonnées du polynôme  $P = X^2 - X + 2$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- On considère l'endomorphisme de  $E$  défini par  $\varphi(P) = XP'$ . Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 13 (\*\*)

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$ . Que peut-on en déduire sur  $f$ ?
- Déterminer une base de  $\ker(f)$  et de  $\text{Im}(f)$ .
- Donner la matrice de  $f$  dans une base constituée uniquement de vecteurs de  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 14 (\*)

Déterminer à chaque fois si la matrice  $A_i$  est semblable à la matrice  $B_i$ .

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

### Exercice 15 (\*\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Pour un réel  $\lambda$  quelconque, calculer  $\ker(A - \lambda I_3)$ .
- En déduire les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $f - \lambda \text{id}$  n'est pas bijective.
- Donner une base de  $\ker(f - \lambda \text{id})$  pour les valeurs de  $\lambda$  obtenues à la question précédente.
- En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

### Exercice 16 (\*\*)

On note dans cet exercice  $E = \mathbb{R}^3$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$  l'application définie par  $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$ .

- Déterminer la matrice  $A$  représentant l'application  $f$  dans la base canonique de  $E$ .

2. Calculer  $A^2$ , puis déterminer une relation entre  $A^2$ ,  $A$  et la matrice identité  $I$ . En déduire une expression de la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  en fonction de  $f$  et de  $id$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , calculer  $\ker(A - \lambda I)$ , et en déduire les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $f - \lambda id$  n'est pas un automorphisme.
4. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels  $\ker(f - id)$  et  $\ker(f - 2id)$ .
5. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans  $E$ .
6. (a) Déterminer deux applications linéaires  $p$  et  $q$  telles que  $p + q = id$  et  $2p + q = f$  (on les exprimera en fonction de  $f$  et de  $id$ , pas besoin de donner une expression explicite).  
(b) Vérifier que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs, et que  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
7. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n = 2^n p + q$ . Cette formule reste-t-elle valable pour  $n = -1$ ?

## Problème 1 : étude de l'activité d'un élève de PTSI. (\*\*\*)

On décide d'observer l'activité d'un élève de classe préparatoire pendant une longue période, en notant toutes les heures l'activité effectuée par l'élève en question. On observe les faits suivants :

- l'élève partage son temps entre trois activités : manger, dormir, et travailler son cours de physique.
- à l'heure numérotée 0 où on démarre l'expérience, l'élève mange.
- s'il travaille à une certaine heure  $n$ , il mangera à l'heure suivante avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , et dormira avec probabilité  $\frac{1}{2}$  (mais ne travaillera donc jamais, faut pas pousser, pas deux heures de suite sur de la physique quand même).
- s'il mange à l'heure  $n$ , de même, il se mettra au boulot avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et dormira avec probabilité  $\frac{1}{2}$  à l'heure  $n + 1$  (et ne mangera jamais, faut digérer le McDo avant d'aller se chercher un grec).
- s'il dort à l'heure  $n$ , il se mettra au travail avec probabilité  $\frac{1}{4}$ , ira prendre un repas avec probabilité  $\frac{1}{4}$ , et continuera sa sieste avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

On impose les notations suivantes pour tout l'exercice : on note  $A_n$  l'événement « L'élève travaille à l'heure  $n$  »,  $B_n$  l'événement « L'élève mange à l'heure  $n$  » et  $C_n$  l'événement « L'élève dort à l'heure  $n$  ». On notera aussi  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités correspondantes.

1. Calculer les probabilités  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$  et  $c_3$ .
2. Calculer la probabilité conditionnelle  $P_{C_3}(A_2)$ .
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .
4. Première méthode de calcul explicite : avec des suites.
  - (a) On pose  $u_n = a_n + b_n + c_n$  et  $v_n = a_n + b_n - c_n$ , montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont très particulières, et déterminer leur valeur.
  - (b) En déduire la valeur de  $c_n$ , puis calculer  $a_n$  et  $b_n$  (on pourra exploiter des suites arithmético-géométriques).
  - (c) Déterminer les limites des trois suites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et interpréter les résultats obtenus.
5. Deuxième méthode : à l'aide de matrices.
  - (a) On pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X_{n+1} = AX_n$ .
  - (b) Prouver rigoureusement que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
  - (c) Exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$  et de  $A^2$ . La matrice  $A$  est-elle inversible?
  - (d) On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
  - (e) Calculer  $D = P^{-1}AP$ , puis en déduire  $A^n$  (il y a un peu de calcul) et retrouver les valeurs de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

6. Troisième méthode : un peu d'applications linéaires.

- (a) On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x+y+z}{2}\right)$ . Montrer que  $f$  est une application linéaire, et déterminer son image et son noyau. L'application  $f$  est-elle un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ?
- (b) Calculer  $F = \ker(f - id)$  et  $G = \ker\left(f + \frac{1}{2}id\right)$ .
- (c) Montrer que tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^3$  peut se décomposer de manière unique sous la forme  $u = u_F + u_G + u_H$ , avec  $u_F \in F$ ,  $u_G \in G$  et  $u_H \in \ker(f)$ .
- (d) On note  $p, q$  et  $r$  les trois applications  $p : u \mapsto u_F$ ,  $q : u \mapsto u_G$  et  $r : u \mapsto u_H$ . Montrer qu'il s'agit de trois projecteurs, et déterminer  $f \circ p$ ,  $f \circ q$  et  $f \circ r$  (on doit pouvoir trouver des expressions faciles sans chercher à faire des calculs explicites).
- (e) En déduire une expression de  $f^n$  en fonction de  $p, q$  et  $r$ , et donner l'expression explicite de  $f^n$ .
- (f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?

## Problème 2 (\*\*)

On note dans tout cet exercice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On notera par ailleurs  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice  $A$  dans la base canonique (base qui sera notée  $\mathcal{B}$  dans la suite de l'exercice).

On note enfin  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ .

### A. Calcul matriciel.

- Calculer  $A^2$  et montrer que  $A^3 = 2A$ .
- Déterminer une base de  $\ker(f)$  et de  $\ker(f - \sqrt{2}id)$ .
- Soient  $u = (1, 0, -1)$ ,  $v = (1, \sqrt{2}, 1)$  et  $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$ . Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , qu'on notera  $\mathcal{B}'$ .
- Écrire la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . On notera  $P$  cette matrice.
- Déterminer l'inverse  $P^{-1}$  de la matrice  $P$ .
- Écrire la matrice  $A'$  de l'application  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

### B. Étude d'une application linéaire.

- Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et que la famille  $(I_3, A, A^2)$  en constitue une base.
- Montrer que,  $\forall M \in F$ ,  $AM \in F$ .
- Soit  $g : \begin{cases} F & \rightarrow & F \\ M & \mapsto & AM \end{cases}$ .
  - Montrer que  $g \in \mathcal{L}(F)$ .
  - Écrire la matrice de  $g$  dans la base  $(I, A, A^2)$ .
  - Montrer que  $g \circ g \circ g = 2g$ .
  - Montrer que  $\text{Im}(g^2 - 2id) \subset \ker(g)$ .
  - Déterminer une base de  $\ker(g)$ .
  - Déterminer  $\dim(\text{Im}(g))$ .
  - Résoudre dans  $F$  l'équation  $g(M) = A + A^2$ .