Feuille d'exercices n^o 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 septembre 2021

Exercice 1

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ (comme toujours, une négation dans un énoncé quantifié est portée par la propriété elle-même et pas par la quantification).
- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile, mais il faut faire attention à un détail pénible en français, le fait que le terme « négatif » soit ambigu, a priori la valeur 0 est incluse si on ne précise pas « strictement négatif »).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- la courbe de f coupe celle de la fonction ln si $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ (aucune raison de préciser dans la quantification que x doit être strictement positif, il le sera de toute façon).

Exercice 2

1. Je n'ai pas choisi de faire une MPSI, je ne suis donc pas un génie des mathématiques.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^3 pair $\Rightarrow n$ pair.
3. Je vais réussir l'exercice, donc je sais écrire une contraposée.
4. S'il existe un entier naturel n tel que $u_n > u_{n+1}$, alors la suite (u_n) n'est pas croissante.
5. M.Lafon ne mettra pas que des mauvaises notes au premier DS, donc il existe des roux qui ne sont pas sadiques.

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 2$: FAUX, $x = 0$ est un des nombreux contre-exemples évidents.
2. $\exists n \in \mathbb{N}$, $2 < n < 4$: VRAI, l'entier 3 convient (et c'est d'ailleurs le seul).
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0, 1[$, par exemple $x = \frac{1}{2}$.
4. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI (en admettant que x et y sont des réels), on peut toujours prendre par exemple $y = \frac{x}{2}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 2n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 2, et le résultat sera toujours un entier naturel.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.

7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples.
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y > 0$, $y = \ln(x)$: FAUX, la fonction ln n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$, et même quand elle est définie, $\ln(x)$ n'est pas toujours strictement positif.
10. un peu de calcul est ici nécessaire : posons $y \neq \dfrac{1}{2}$ et essayons de résoudre l'équation $\dfrac{x+1}{2x-1} = y$. Ell est équivalente (on a déjà supposé $x \neq \dfrac{1}{2}$) à $x+1 = 2xy - y$, soit $1 + y = x(2y-1)$. On constate que cette équation admet une solution dès que $y \neq \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que la propriété proposée est VRAIE. Notons en passant que $x = \dfrac{y+1}{2y-1}$, on a donc « la même formule » que celle exprimant y en fonction de x. Cela revient en fait à dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ est sa propre réciproque.
11. le dernier énoncé est VRAI mais pas évident à prouver. Il existe nécessairement un entier n pour lequel $\dfrac{1}{n} < y - x$, puisque $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et $y - x > 0$. Notons alors p le plus grand entier relatif pour lequel $\dfrac{p}{n} < y$. Un tel entier existe toujours, il sera positif si y l'est et négatif dans le cas contraire. Par définition de p, $\dfrac{p}{n} < y$, mais on peut aussi constater que $\dfrac{p}{n} > x$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\dfrac{p}{n} \leqslant x$, donc $\dfrac{p+1}{n} \leqslant x + \dfrac{1}{n} < y$, ce qui contredirait la définition de l'entier p (ce ne serait plus le plus grand entier vérifiant la condition donnée). Le nombre rationnel $\dfrac{p}{n}$ est donc strictement compris entre x et y, il satisfait la propriété qu'on voulait prouver.

Exercice 4

C'est extrêmement mécanique et peu palpitant :

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $x < 2$
- $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \in]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$
- $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $x \leqslant y$
- $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 2n$
- $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n \neq 2p$
- $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) \neq 2p$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $y^2 \leqslant x$
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y > 0$, $y \neq \ln(x)$
- $\exists y \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\dfrac{x+1}{2x-1} \neq y$
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y > x$, $\forall z \in \mathbb{Q}$, $z \leqslant x$ ou $z \geqslant y$

Exercice 5

- Commençons par constater que $|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$, donc $B = [-5, 5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4, 7] \cup [-5, 5] = [-5, 7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A, donc $A \cap C = \{4, 5, 6, 7\}$. On peut noter ce genre d'ensemble sous la forme $[\![4, 7]\!]$.

- Un exemple élémentaire de différence, on fait attention au sens des crochets : $[-2, 12]\backslash B =]5, 12]$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C, c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4, 5[\cup]5, 6[\cup]6, 7[$.
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est contitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = [\![0, 7]\!]$.
- $A \cup (B \cap C) = [4, 7] \cup [\![0, 3]\!]$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty, -5[\cup]7, +\infty[\cup[\![0, 3]\!]$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 6

1. Un simple dessin suffit à se convaincre que l'union va être égale à E tout entier. On peut le prouver de plusieurs façons différentes :
   - prendre un élément x appartenant à E, et distinguer quatre cas selon son appartenance ou non à A et à B. Chacune des quatre possibilités résulte en l'appartenance de x à exactement un des quatre ensembles dont on calcule l'union, qui est donc égale à E tout entier.
   - faire une table de de vérité, qui ne contiendra ici que quatre lignes mais un certain nombre de colonens.
   - plus simplement, utiliser les propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles : par distributivité, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$, et de même $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$, donc l'union recherchée est égale à $A \cup \overline{A} = E$.
2. Pour changer un peu, faisons cette fois-ci une table de vérité, en notant C l'ensemble qu'on cherche à calculer (j'ai enlevé les « $x \in$ » dans les intitulés des colonnes pour réduire un peu la taille du tableau) :

A	B	$(A \cap B)$	$(A \cup \overline{B})$	$(\overline{A} \cap B)$	$(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$	$\overline{A \cap B}$	C
V	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

   On constate finalement que $C = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, puisque le crochet qui précède est en fait égal à E tout entier.

Exercice 7

1. Supposons donc que $B \subset C$, et considérons un élément x appartenant à $A \cup B$. Deux possibilités : soit $x \in A$, et donc $x \in A \cup C$, soit $x \in B$, et alors $x \in C$ puisque $B \subset C$, donc $x \in A \cup C$. Dans tous les cas, $x \in A \cup C$, ce qui prouve bien que $(A \cup B) \subset (A \cup C)$.
2. On va raisonner par contraposée. Si $B \neq C$, cela signifie qu'il existe un élément x appartenant à l'un des deux ensembles mais pas à l'autre, par exemple $x \in B$ et $x \notin C$ (l'autre cas est complément symétrique). On distingue alors deux cas :
   - si cet élément x appartient à A, il appartient donc à $A \cap B$, mais pas à $A \cap C$, ce qui prouve que $A \cap B \neq A \cap C$.
   - si cet élément x n'appartient pas à A, il appartient à $A \cup B$, mais pas à $A \cup C$, ce qui prouve que $A \cup B \neq A \cup C$.

   Dans les deux cas, l'une des hypothèses de notre implication est fausse, ce qui prouve sa contraposée, et donc l'implication elle-même.

3. Supposons pour commencer l'égalité $A \cup B = A \cup C$ vérifiée, et essayons de prouver que $A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$. Pour cela, on va procéder comme souvent par double inclusion. Soit $x \in A \cup \overline{B}$, il y a deux possibiltés : si $x \in A$, on aura a fortiori $x \in A \cup \overline{C}$; et si $x \notin A$, alors $x \in \overline{B}$, donc $x \notin B$. Mais alors $x \notin A \cup B$, ce qui implique $x \notin A \cup C$ d'après notre hypothèse initiale. On a donc $x \notin C$, et par conséquent $x \in A \cup \overline{C}$. Ouf, on a prouvé que $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$. L'inclusion réciproque se fait exactement de la même façon puisque les deux ensembles B et C jouent un rôle exactement symétrique dans cet exercice. Nous avons donc prouvé l'implication « gauche vers droite » de l'équivalence à prouver. On va en fait s'arrêter là, car l'implication réciproque dit exactement la même chose, en inversant le rôle des ensembles B et C et de leurs complémentaires. Comme la preuve qu'on vient de faire est valable pour des sous-ensembles quelconques, elle s'adapte sans problème à $\overline{B}$ et $\overline{C}$, et il y a bien équivalence.

4. Ici, l'utilisation de propriétés de distributivité ne fonctionne pas très bien, on n'arrive pas à simplifier les expressions des deux membres de l'égalité. En fait ce n'est pas vraiment nécessaire : un élément x appartient au membre de gauche de l'égalité si et seulement si il appartient à au moins deux des ensembles A, B et C. En effet, s'il appartient à deux des trois ensembles, il sera dans l'une des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$ ou $B \cap C$, et donc dans leur union. Inversement, s'il n'appartient qu'à un seul des ensembles (ou à aucun), il ne sera dans aucune des trois intersections (il y aura toujours au moins un des deux ensembles de l'intersection auquel il n'appartient pas), et donc pas non plus dans la réunion. Intéressons-nous maintenant au membre de droite : un élément qui appartient aux trois ensembles A, B et C sera manifestement dans l'intersection proposée ; s'il appartient à deux ensembles sur les trois aussi, puisqu'il appartiendra alors à chacune des trois unions dont on fait l'intersection. Mais s'il n'appartient qu'à un seul des trois (ou aucun), par exemple à A, il n'appartiendra pas à l'une des unions (ici à $B \cup C$) et donc pas non plus à l'intersection proposée. Les éléments des deux membres de l'égalité sont donc bien les mêmes.

   Si on préfère, une bonne vieille table de vérité fonctionne bien ici (on a noté « gauche » et « droite » pour indiquer les membres de gauche et de droite de l'égalité qu'on cherche à prouver) :

A	B	C	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(B \cap C)$	gauche	$(A \cup B)$	$(A \cup C)$	$(B \cup C)$	droite
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 8

1. Un élément apprtenant à $A_i \times B$ est un élément de la forme (x_i, y), avec $x_i \in A_i$ et $y \in B$. Un élément appartient donc à l'ensemble de gauche de notre égalité s'il est de la forme (x, y), avec x appartenant à (au moins) l'un des ensembles A_i. C'est exactement la même chose pour l'ensemble de droite.

2. Un couple (x, y) appartient à $A_i \times B_i$ si $x \in A_i$ et $y \in B_i$. Pour que ce même couple appartienne à l'intersection de tous les ensembles $A_i \times B_i$, il faut donc que l'élément x appartienne simultanément à tous les ensembles A_i, et l'élément y à tous les ensembles B_i. Dans ce cas, (x, y) est aussi un élément de l'ensemble de droite, et réciproquement (leur description est rigoureusement la même).

3. Non, c'est complètement faux avec une union. Un exemple particulièrement caricatural avec seulement deux valeurs de l'indice i. On pose $A_1 = \emptyset$ et $A_2 = \mathbb{R}$, et symétriquement $B_1 = \mathbb{R}$ et $B_2 = \emptyset$. Les deux ensembles $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont vides (le produit de l'ensemble vide avec n'importe quel autre ensemble est nécessairement vide), donc $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \emptyset$. Pourtant, $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est loin d'être un ensemble vide.

Exercice 9

Commençons par écrire $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ (ensemble à quatre éléments), puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\},$
$\{\{1\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}$ (ensemble à seize éléments qui sont presque tous particulièrement atroces).

Exercice 10

1. Un élément de $\mathcal{P}(E)$ est un sous-ensemble de l'ensemble E, et donc a fortiori un sous-ensemble de $E \cup F$. De même, tout élément appartenant à $\mathcal{P}(F)$ appartient aussi à $\mathcal{P}(E \cup F)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

   L'inclusion réciproque est complètement fausse, comme le prouve cet exemple simple : si $E = \{1,2\}$ et $F = \{3,4\}$, $E \cup F = \{1,2,3,4\}$. Le sous-ensemble $G = \{1,3\}$ appartient certainement à $\mathcal{P}(E \cup F)$, mais ni à $\mathcal{P}(E)$, ni à $\mathcal{P}(F)$, donc pas non plus à leur union.
2. Un élément de $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ est un ensemble qui est à la fois un sous-ensemble de E et un sous-ensemble de F. Autrement dit, il s'agit d'un ensemble G vérifiant $G \subset E$ et $G \subset F$. Dans ce cas, on a également $G \subset E \cap F$, ce qui prouve que $G \in \mathcal{P}(E \cap F)$. Cette fois, la réciproque est aussi vraie : si $G \subset E \cap F$, alors $G \subset E$ et $G \subset F$, donc on a en fait $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Soit $G \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut écrire $G = H \times I$, avec $H \subset E$ et $I \subset F$. En particulier, tout élément de G est de la forme (x, y), avec $x \in H$ et $y \in I$, donc a fortiori $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble G est donc uniquement constitué d'éléments appartenant à $E \times F$, il appartient à $\mathcal{P}(E \times F)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \times F)$.

   Comme dans le cas de l'union, la réciproque est fausse, et on peut prendre les mêmes ensembles E et F pour le contre-exemple : l'ensemble $G = \{(1,3); (2,4)\}$ appartient à $\mathcal{P}(E \times F)$ (il est constitué de deux éléments appartenant tous les deux à $E \times F$), mais pas à $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(\mathcal{F})$. En effet, si on voulait écrire $G = H \times I$ avec $H \subset E$ et $I \subset F$, on devrait avoir $1 \in H$ (puisque $(1,3) \in G$), $2 \in H$ (car $(2,4) \in G$), et pour les mêmes raisons $3 \in H$ et $4 \in H$. Mais on aurait alors $G = H \times I = E \times F$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 11

On va procéder par analyse et synthèse. La façon la plus rapide d'obtenir énormément d'informations sur f ici est de poser $y = f(x)$ (c'est un réel comme un autre, il doit vérifier la propriété) pour simplifier le membre de gauche. On obtient, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2 - x - f(x)$, soit $f(x) = 2 - x - f(0)$. Or, $f(0)$ est une constante réelle, donc on a déjà prouvé que f est nécessairement une fonction affine dont l'expression est de la forme $f(x) = a - x$. Effectuons désormais la synthèse : en supposant que $f(x) = a - x$, avec $a \in \mathbb{R}$, on aura $f(y - f(x)) = f(y - a + x) = a - (y - a + x) = 2a - y - x$. Or, on veut que cette expression soit toujours égale à $2 - x - y$, ce qui ne sera le cas que si $a = 1$. Autrement dit, la seule fonction vérifiant les conditions de l'énoncé est la fonction affine $f : x \mapsto 1 - x$.

Exercice 12

Là encore, il va falloir procéder par analyse et synthèse, mais surtout exploiter le fait que l'énoncé nous a donné la réponse ! On doit obtenir des fonctions dont l'expression est de la forme $f(x) = ax+b$. Supposons donc que $f(x) = ax + b$, alors l'ordonnée à l'origine b est nécessairement égale à $f(0)$, et le coefficient directeur a peut être obtenu en calculant $f(1) = a+b$, donc $a = f(1) - b = f(1) - f(0)$.

Soit donc une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé, et posons $a = f(0)$ et $b = f(1) - f(0)$ (sans supposer que f est affine !), et appliquons la condition de l'énoncé à $y = 0$ et $z = 1$: $\dfrac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$, soit $\dfrac{f(x) - b}{x} = \dfrac{f(x) - a - b}{x - 1}$. Cette égalité est bien sûr valable pour tous les réels x différents de 0 et de 1, et peut se mettre sous la forme $(f(x)-b)(x-1) = x(f(x)-a-b)$, soit $xf(x) - bx - f(x) + b = xf(x) - ax - bx$. Deux jolies simplifications plus tard, on trouve $f(x) = ax + b$. Cette égalité restant vraie pour $x = 0$ et $x = 1$, la fonction f est bien une fonction affine.

Réciproquement, vérifions quand même que les fonctions affines sont bien solutions du problème posé : si $f(x) = ax+b$, alors $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{ay + b - ax - b}{y - x} = a$, ce qui est indépendant des valeurs choisies pour x et y, et donc égal à $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$.