

# Feuille d'exercices n° 1 : Logique, ensembles.

MPSI Lycée Camille Jullian

3 septembre 2021

## Exercice 1

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs ( $f$  est ici une fonction réelle qui jouera un rôle de variable libre) :

- L'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution.
- La fonction  $f$  est constante.
- Tout réel  $a$  (au moins) un antécédent par  $f$ .
- La fonction  $f$  ne prend pas de valeur négative.
- Tout réel  $a$  (au moins) deux antécédents par  $f$ .
- La fonction  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur.
- La courbe représentative de fonction  $f$  coupe celle de la fonction  $\ln$ .

## Exercice 2

Exprimer la contraposée de chacun des énoncés suivants :

1. Je suis un génie des mathématiques, donc j'ai choisi de faire une MPSI.
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, n$  impair  $\Rightarrow n^3$  impair.
3. Je ne sais pas écrire une contraposée, donc je ne vais pas réussir à faire cet exercice.
4.  $(u_n)$  est une suite croissante  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .
5. Tous les roux sont des sadiques, donc M.Lafon ne va mettre que des mauvaises notes au premier DS de maths de l'année.

## Exercice 3

Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$
- $\exists x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
- $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, y = \ln(x)$
- $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, y = \frac{x+1}{2x-1}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > x, \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$

## Exercice 4

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 3 (avec des quantificateurs, bien entendu).

## Exercice 5

On se place dans  $\mathbb{R}$  et on considère les ensembles  $A = [4, 7]$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$ , et  $C = \mathbb{N}$ . Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants :  $A \cup B$ ;  $A \cap C$ ;  $[-2, 12] \setminus B$ ;  $A \cap \overline{C}$ ;  $(A \cup B) \cap C$ ;  $A \cup (B \cap C)$ ;  $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$ .

## Exercice 6

Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Simplifier les expressions suivantes :

1.  $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
2.  $[(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

## Exercice 7

Soit  $E$  un ensemble,  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois de ses sous-ensembles. Montrer les propriétés suivantes :

1.  $(B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cup C)$ .
2. si  $A \cup B = A \cup C$  et  $A \cap B = A \cap C$ , alors  $B = C$ .
3.  $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$ .
4.  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

## Exercice 8

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $E$  et  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de sous-ensembles de  $F$ .

1. Montrer que  $\bigcup_{i \in I} (A_i \times B) = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B$ .
2. Montrer que  $\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)$ .
3. Cette dernière propriété serait-elle vraie pour une union ? Justifier.

## Exercice 9

Écrire en extension l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$ .

## Exercice 10

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Déterminer dans chacun des trois cas suivants les inclusions possibles entre les deux ensembles proposés (on justifiera chaque inclusion, et on donnera un contre-exemple pour chaque inclusion fautive) :

1.  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cup F)$
2.  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \cap F)$
3.  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(E \times F)$

## Exercice 11

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y - f(x)) = 2 - x - y$ .

## Exercice 12

Soit  $f$  une fonction réelle vérifiant  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$  (en supposant  $z \neq x$  et  $z \neq y$ ). Montrer que  $f$  est nécessairement une fonction affine.