Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 18 : Intégration

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mars 2022

Exercice 1 (**)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire la limite de nI_n.

Exercice 2 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 (**)

On définit la suite (I_n) par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^n \, dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0 et de I_2.
2. À l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$ puis d'une (petite) décomposition en éléments simples, calculer I_1.
3. Déterminer la monotonie de la suite (I_n). Peut-on en déduire quelque chose ?
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$ (on pourra par exemple écrire $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx$, puis effectuer une IPP intelligente).
5. En déduire la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (**)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 6 (**)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leqslant n$, $\int_0^1 t^k f(t) \, dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$.

Exercice 7 (**)

Déterminer toutes les fonctions f continues sur $[0,1]$ telles que $\int_0^1 f^2(t) \, dt = \int_0^1 f^3(t) \, dt = \int_0^1 f^4(t) \, dt$ (il y en a fort peu).

Exerice 8 (**)

Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$, montrer que $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x) \, dx \geqslant 0$. On pourra effectuer deux IPP successives en choisissant bien les primitives.

Exercice 9 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2} \, dt$
- $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{ch}(t)}{t^2} \, dt$
- $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} \, dt$

Exercice 10 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que, $\lim\limits_{x\to+\infty} x f_0(x) = 1/x$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 11 (*)

Calculer $\inf_{a\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax)^2\, dx$.

Exercice 12 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 13 (***)

Le but de l'exercice est de calculer la limite (si elle existe) de la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. En posant $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$, étudier la nature de la suite (v_n) (et donner sa limite le cas échéant).
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
3. Conclure.

Exercice 14 (**)

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la limite de (nu_n), en déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 15 (***)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t) \sin(t)\, dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X - \pi) = P_n(X)$.

2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Exercice 16 (***)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt$.

1. Préciser le domaine de définition et la parité éventuelle de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier les variations de f sur l'intervalle $]0, 2\pi]$.
3. Après avoir effectué une IPP en dérivant le facteur $\frac{1}{t}$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
4. Étudier la limite quand x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t) - 1}{t}\, dt$, puis en déduire que f peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 17 (***)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser (mais qu'on ne demande pas de résoudre).
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x f(x) = 1$.
4. On pose $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle s'annule en un unique x_0 compris strictement entre 0 et 1.
5. En déduire le tableau de variations de f (on ne cherchera pas à calculer x_0.
6. Tracer une allure plausible de la courbe représentative de f.

Exercice 18 (**)

On définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer, pour les valeurs de x pour lesquelles ça a un sens, la valeur de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt$.
3. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$ (préciser le sens des inégalités selon la valeur de x), puis montrer que f est prolongeable par continuité à deux endroits différents.
4. Calculer la valeur de $f'(x)$ là où elle est naturellement définie.
5. Montrer que f est en fait prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
6. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt$ existe, et donner sa valeur.

Exercice 19 (**)

Déterminer toutes les fonctions f continues sur $[0, 1]$ telles que $\int_0^1 f(t)\, dt = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\int_0^1 f^2(t^2)\, dt$ (on interprètera le $\dfrac{1}{3}$ comme l'intégrale d'une fonction simple entre 0 et 1, et on écrira le membre de gauche sous une autre forme à l'aide d'un changement de variable pour simplifier nettement la condition donnée).

Exercice 20 (***)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On notera $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que, $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{1}{2}M_2 a$.
2. En déduire que f' est aussi bornée et que, en notant $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$, on a $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 21 (***)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ telle que $f(a) = 0$.

1. On note F la primitive de $|f'|$ s'annulant en a. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant F(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2\ dx$.

Exercice 22 (**)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\ dt = 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt) = 0$. Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 23 (***)

Pour tout réel $x \notin \{-1,1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\ dt$. De façon assez surprenante, il est conseillé de passer par un calcul de sommes de Riemann.

Problème 1 (***)

Le retour du calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, par une méthode très différente de celle vue dans la feuille d'exercices précédente. Cette fois-ci, on a va sans surprise utiliser des intégrales (et un peu de trigo).

1. Soit k un entier naturel non nul. Calculer les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(kt)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)\ dt$.
2. En déduire deux constantes a et b (indépendantes de k) telles que $\displaystyle\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt)\ dt = \frac{1}{k^2}$.
3. On pose $S_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\pi} (at+bt^2)S_n(t) = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, où C est une constante qu'on exprimera en fonction de a et de b.
4. Vérifier que, $\forall t \in]0,\pi[$, on a $S_n(t) = \dfrac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$. Que vaut $S_n(0)$?
5. Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $t \mapsto \dfrac{at+bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra utiliser si besoin que $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\frac{\sin(t)}{t} - \cos(t)}{t} = 0$).
6. Montrer que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors $\displaystyle\int_{k\to+\infty 0}^{\pi} g(t)\sin(kt)\ dt = 0$ (on pourra effectuer une IPP).

7. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Problème 2 (***)

Le but de ce problème est d'étudier l'efficacité de la méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales. Pour toute fonction f continue sur le segment $[-1,1]$, on pose $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ et $S(f) = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$ (ce qui correspond au calcul de la méthode de Simpson sans faire de découpage de l'intervalle en n morceaux).

1. Un peu de calcul pour débuter : calculer les valeurs de $I(f)$ et de $S(f)$ (et les comparer) lorsque :
   - f est une fonction impaire.
   - $f(t) = t^4$.
   - $f(t) = \frac{1}{t+2}$.
   - $f(t) = \frac{1}{t^2+2t+3}$.
2. On continue avec du calcul : vérifier que $I(f) = S(f)$ si $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$ (on pourra utiliser certains des calculs précédents pour abréger dans certains cas). En déduire que l'égalité reste vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
3. On revient au cas général et on suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}3[X]$ tel que $P_f(-1) = f(-1)$, $P_f(0) = f(0)$, $P_f(1) = f(1)$ et $P_f'(0) = f'(0)$. Exprimer les coefficients de P_f en fonction de $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ et $f'(0)$.
4. On considère un réel $\alpha \in]0,1[$, et on pose $h(x) = f(x) - P_f(x) - kx^2(x^2-1)$, où k est une constante réelle fixée telle que $h(\alpha) = 0$.
   (a) Vérifier que $h'(0) = 0$.
   (b) Pour quelles valeurs de x peut-on affirmer que $h(x) = 0$?
   (c) Montrer que h' s'annule en quatre points distincts de l'intervalle $[-1,1]$ (on pourra utiliser les questions précédentes et appliquer intelligemment le théorème de Rolle).
   (d) En déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que $h^{(4)}$ s'annule en un certain point $\beta \in [-1,1]$, et prouver que $k = \frac{f^{(4)}(\beta)}{4!}$.
   (e) Montrer que $|f(\alpha) - P_f(\alpha)| \leqslant \frac{M_4}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2)$, où M_4 est la valeur maximale prise par $|f^{(4)}|$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
5. Déduire du résultat précédent que, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{M_4}{4!}t^2(1-t^2)$. On admet que ce résultat est également vérifié sur l'intervalle $[-1,0]$.
6. En intégrant le résultat précédent, prouver que $|I(f) - S(f)| \leqslant \frac{M_4}{90}$.
7. Comparer $|I(f) - S(f)|$ avec $\frac{M_4}{90}$ dans le cas où $f(t) = t^4$. En déduire que la majoration précédente ne peut pas être améliorée.